BULLETIN DE LA S. M. F.

R. PERRIN

Sur l'intégration indéterminée $x^3 + y^3 = z^3$

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 194-197
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__194_1>

Sur l'équation indéterminée $x^3 + y^3 = z^3$;
par M. R. Perrin.

(Séance du 6 mai 1885.)

1. On sait que Fermat a annoncé l'impossibilité de décomposer un cube en deux autres cubes, et généralement une puissance quelconque en deux puissances du même nom, au-dessus de la seconde; mais que cette impossibilité n'a été démontrée jusqu'ici que pour les puissances dont l'indice est un multiple de 4 ([1]). Je me propose de montrer, pour le cas particulier du cube, que si l'on peut déterminer une solution, en nombres entiers et premiers entre eux (on peut se borner à considérer les solutions de cette nature), de l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3, \tag{1}$$

on en déduira immédiatement une série indéfinie d'autres solutions, toujours en nombres entiers et premiers entre eux, toutes différentes entre elles ; chaque solution de cette série comprend en effet, sur les trois entiers qui la constituent, un entier au moins égal à trois fois le produit des trois entiers constituant la solution immédiatement précédente; et la série peut ainsi être considérée comme fournissant des solutions indéfiniment croissantes.

2. Pour arriver à ces résultats de la manière la plus simple, je

---

([1]) Le théorème de Fermat a été démontré pour un très grand nombre d'indices premiers impairs et en particulier pour l'indice 3. Nous insérons néanmoins l'analyse de M. Perrin, dont on peut se servir pour simplifier la démonstration de cette impossibilité. (*Note de la Rédaction.*)

partirai de l'identité

$$(2) \qquad (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a),$$

à laquelle satisfont trois quantités quelconques a, b, c. Si l'on suppose que a, b, c soient trois entiers, positifs ou négatifs, satisfaisant à l'équation (1) mise sous la forme symétrique

$$(3) \qquad a^3 + b^3 + c^3 = 0,$$

ils satisferont donc par cela même à l'équation

$$(4) \qquad (a+b+c)^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a);$$

et réciproquement, les équations (3) et (4) sont entièrement équivalentes. Si de plus on suppose a, b, c premiers entre eux, il en sera de même de $a+b$, $b+c$, $c+a$: car tout facteur premier de $a+b$, par exemple, divise $a+b+c$ et par suite c en vertu de (4); s'il divisait encore $b+c$ ou $c+a$, il diviserait b ou a en même temps que c, ce qui est contraire à l'hypothèse. Dès lors, $a+b$, $b+c$, $c+a$ doivent être des cubes parfaits, abstraction faite des puissances de 3; et si l'on désigne par α, β, γ trois entiers premiers entre eux et avec 3, et par n un entier positif au moins égal à 1, l'équation (4) ne peut être satisfaite qu'à la condition de poser

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} a+b &= 3^{3n-1}\gamma^3, \\ b+c &= \alpha^3, \\ c+a &= \beta^3; \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(6) \qquad a+b+c = 3^n\alpha\beta\gamma.$$

α, β, γ seront donc liés par l'équation de condition

$$(7) \qquad \alpha^3 + \beta^3 + 3^{3n-1}\gamma^3 - 2.3^n\alpha\beta\gamma = 0,$$

et a, b, c auront pour expressions, en fonction de α, β, γ,

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} a &= \alpha(3^n\beta\gamma - \alpha^2), \\ b &= \beta(3^n\alpha\gamma - \beta^2), \\ c &= 3^n\gamma(\alpha\beta - 3^{2n-1}\gamma^2). \end{aligned}\right.$$

Trouver trois entiers a, b, c premiers entre eux satisfaisant à l'équation (3) revient donc à trouver trois entiers α, β, γ premiers entre eux et avec 3, satisfaisant à l'équation (7).

3. Posons maintenant

$$(9)\qquad \begin{cases} a_1+b_1=9a^3b^3c^3, \\ b_1+c_1=(a^2b+b^2c+c^2a)^3, \\ c_1+a_1=(a^2c+c^2b+b^2a)^3. \end{cases}$$

Je dis qu'on aura

$$(10)\qquad (a_1+b_1+c_1)^3=3(a_1+b_1)(b_1+c_1)(c_1+a_1),$$

et, par suite,

$$(11)\qquad a_1^3+b_1^3+c_1^3=0.$$

En effet, la relation (10) revient, en vertu de (9), à celle-ci

$$\begin{aligned}&[9a^3b^3c^3+(a^2b+b^2c+c^2a)^3+(a^2c+c^2b+b^2a)^3]^3 \\ &\quad =8.27a^3b^3c^3(a^2b+b^2c+c^2a)^3(a^2c+c^2b+b^2a)^3,\end{aligned}$$

c'est-à-dire à

$$\begin{aligned}&9a^3b^3c^3+(a^2b+b^2c+c^2a)^3+(a^2c+c^2b+b^2a)^3 \\ &\quad =6abc(a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+c^2b+b^2a),\end{aligned}$$

laquelle se vérifie immédiatement, en développant et tenant compte de (3).

D'ailleurs l'équation (10) donne, en tenant compte de (9),

$$a_1+b_1+c_1=3abc(a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+c^2b+b^2a)$$

et, par suite, a_1, b_1, c_1 ont respectivement pour valeurs

$$(12)\qquad \begin{cases} a_1=3abc(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+3a^2b^2c^2)-(a^2b+b^2c+c^2a)^3, \\ b_1=3abc(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+3a^2b^2c^2)-(a^2c+c^2b+b^2a)^3, \\ c_1=3abc(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3). \end{cases}$$

a_1, b_1, c_1 sont premiers entre eux. En effet, puisque c admet le facteur 3 à la puissance n, et que a et b ne l'admettent pas, c_1 l'admettra à la puissance $n+1$; mais a_1 et b_1 ne l'admettront pas, comme on le voit à l'inspection des formules (12). Soit ensuite un facteur premier, autre que 3, commun à a_1 et c_1 par exemple; il divisera aussi b_1 en vertu de (11), donc aussi a_1+b_1, donc aussi a, b, ou c en vertu de la première des équations (9). Divisant a_1 et a, par exemple, il devra diviser $a^2b+b^2c+c^2a$ en vertu de la première des équations (12), c'est-à-dire b^2c, c'est-à-dire b ou c en même temps que a, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc enfin a_1, b_1, c_1 fournissent une seconde solution en nombres entiers et premiers entre eux de l'équation (3). D'ailleurs c_1 étant au moins égal, en valeur absolue, à $3\,abc$, cette solution est essentiellement distincte de la première.

En opérant sur a_1, b_1, c_1 comme il a été fait sur a, b, c, on obtiendra évidemmment une trqisième solution, distincte des deux premières, et ainsi de suite indéfiniment, ce qui est bien le résultat annoncé.

On peut remarquer que, si l'on veut introduire pour la seconde solution (a_1, b_1, c_1) des quantités α_1, β_1, γ_1, analogues aux quantités α, β, γ, considérées pour la première, on aura les groupes de relations

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= a^2 b + b^2 c + c^2 a,\\ \beta_1 &= a^2 c + c^2 b + b^2 a,\\ \gamma_1 &= \frac{abc}{3^n};\end{aligned}\right.$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 3^{n+2}\gamma_1^3,\\ b_1 + c_1 &= \alpha_1^3,\\ c_1 + a_1 &= \beta_1^3;\end{aligned}\right.$$

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1(3^{n+1}\beta_1\gamma_1 - \alpha_1^2),\\ b_1 &= \beta_1(3^{n+1}\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2),\\ c_1 &= 3^{n+1}\gamma_1(\alpha_1\beta_1 - 3^{2n+1}\gamma_1^2),\end{aligned}\right.$$

et enfin, entre α_1, β_1, γ_1, la relation de condition

$$(16)\qquad \alpha_1^3 + \beta_1^3 + 3^{3n+2}\gamma_1^3 - 2.3^{n+1}\alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0,$$

qui correspond à (7) et n'en diffère que par le changement de n en $n+1$. Chacune des solutions successives répond donc à une valeur de l'exposant n plus élevée d'une unité.