BULLETIN DE LA S. M. F.

H. POINCARÉ

Remarques sur l’emploi de la méthode précédente

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 19-27
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__19_0>

Remarques sur l'emploi de la méthode précédente, par M. H. Poincaré.

(Séance du 20 décembre 1884.)

Dans la méthode élémentaire que vient d'introduire M. Appell dans la théorie des fonctions elliptiques, et dont l'importance n'échappera à personne, ce savant géomètre a été conduit à envisager une infinité d'équations linéaires contenant une infinité d'inconnues. Comme des équations de même forme peuvent se rencontrer dans d'autres problèmes, il importe de rechercher dans quels cas on peut légitimement employer la méthode qui a réussi à M. Appell, c'est-à-dire prendre m des équations proposées, n'y conserver que les m premières inconnues en y supprimant tous les termes qui dépendent des autres inconnues; calculer les valeurs des inconnues conservées, et enfin faire croître le nombre m indéfiniment.

J'envisagerai d'abord une série indéfinie de nombres

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots,$$

tels que

$$|a_{n+1}| > |a_n|, \quad \lim |a_n| = \infty \quad \text{pour } n = \infty.$$

Je chercherai ensuite à déterminer une autre série de nombres

$$A_1, \ A_2, \ \ldots, \ A_n, \ \ldots,$$

tels que les séries

$$A_1 a_1^p + A_2 a_2^p + \ldots + A_n a_n^p + \ldots$$

(où l'on fait successivement $p = 0, 1, 2, \ldots$, ad inf.) soient toutes absolument convergentes et aient pour somme o. J'ai ainsi, pour déterminer les quantités A, une infinité d'équations homogènes et linéaires

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} A_n a_n^p = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, \text{ad inf.}).$$

Formons la fonction entière $F(x)$, qui admet pour zéros les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Nous la supposerons de genre o, de telle sorte que

$$F(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)\cdots$$

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ une infinité de cercles ayant pour centre l'origine, et tels que le rayon de C_n soit compris entre $|a_n|$ et $|a_{n+1}|$. Soit J_{np} l'intégrale

$$\int \frac{x^p\,dx}{F(x)},$$

prise le long du cercle C_n. Supposons que J_{np} tende vers o, *quel que soit p*, toutes les fois que n croît indéfiniment.

Soit A_i le résidu de $\frac{1}{F(x)}$ pour $x = a_i$. Il est clair que l'hypothèse précédente peut s'écrire

$$\Sigma A_i a_i^p = 0,$$

de sorte que les A_i nous donnent une solution des équations (1).

Cette solution s'écrit

$$A_i = \frac{-a_i}{\left(1 - \frac{a_i}{a_1}\right)\left(1 - \frac{a_i}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{a_i}{a_n}\right)\cdots},$$

et elle est bien celle à laquelle conduirait la méthode de M. Appell.

Mais cette solution n'est pas unique. Il est clair, en effet, que les quantités $A_i a_i$, $A_i a_i^2, \ldots$ satisferont également aux équations (1).

Plus généralement, soit

$$S_p = \Sigma\,|A_n a_n^p|;$$

S_p est finie, puisque nos séries sont supposées absolument convergentes.

Soient

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots$$

des nombres tels que la série

$$\lambda_0 S_0 + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ldots + \lambda_p S_p + \ldots$$

soit absolument convergente.

Alors les quantités

$$A_i(\lambda_0 + \lambda_1 a_i + \lambda_2 a_i^2 + \ldots)$$

satisferont aux équations (1), comme les quantités A_i elles-mêmes.

Si l'on se propose de trouver la solution la plus générale de ces équations (1), on rencontre de grandes difficultés. Voici, toutefois, une remarque qu'il est aisé de faire.

Soit

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

une solution quelconque des équations (1). La série

$$\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}+\ldots$$

sera absolument convergente et représentera une fonction méromorphe qu'on pourra écrire sous la forme du quotient de deux fonctions entières

$$\frac{\psi(x)}{F(x)}.$$

Alors la condition nécessaire et suffisante, que la fonction $\psi(x)$ devra remplir, sera la suivante :

L'intégrale

$$\int \frac{\psi(x)x^p\,dx}{F(x)},$$

prise le long de C_n, devra tendre vers zéro, quel que soit p, quand n croîtra indéfiniment.

On voit, par cette seule remarque, que les conditions imposées par les équations (1) aux quantités A sont plutôt, pour ainsi dire, des conditions d'inégalité que des conditions d'égalité.

Si, de même, on considère une double infinité de nombres donnés

$$\begin{array}{l} \alpha_{10}, \alpha_{20}, \ldots, \alpha_{n0}, \ldots, \\ \alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1}, \ldots, \\ \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \\ \alpha_{1p}, \alpha_{2p}, \ldots, \alpha_{np}, \ldots, \end{array}$$

puis qu'on cherche à déterminer les quantités A, de façon à satisfaire aux équations

$$(1\ bis) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha_{np} = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, \text{ad inf.}),$$

on envisagera une infinité de nombres choisis d'une façon quelconque

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

et l'on formera la fonction entière $F(x)$, qui admet ces nombres pour zéros. On pourra évidemment toujours s'arranger pour que cette fonction entière soit de genre o.

On pourra ensuite toujours trouver une infinité de fonctions entières

$$\theta_0(x),\ \theta_1(x),\ \theta_2(x),\ \ldots,\ \theta_p(x),\ \ldots,$$

satisfaisant aux conditions

$$\theta_p(a_n) = \alpha_{np}.$$

Cela posé, on obtiendra la solution générale des équations (1 *bis*), en cherchant toutes les fonctions entières $\psi(x)$, telles que

$$\lim\left[\int \frac{\psi(x)\theta_p(x)\,dx}{F(x)} \text{ prise le long de } C_n\right] = 0 \quad \text{pour } n = \infty,$$

quel que soit p.

Les résidus de la fonction $\frac{\psi(x)}{F(x)}$ seront alors les quantités A cherchées.

Ces considérations sommaires montrent que la solution obtenue par la méthode de M. Appell n'est pas unique; il y a même des cas où elle n'existe pas.

Il ne suffit pas, en effet, que la fonction $F(x)$ soit de genre o pour que cette solution convienne. Ainsi revenons aux équations

$$(1) \qquad \Sigma A_n a_n^p = 0,$$

en faisant

$$a_n = (n - \tfrac{1}{2})^2 \pi^2,$$

de telle sorte que

$$F(x) = \cos\sqrt{x}$$

soit de genre o.

Je dis que les résidus de la fonction $\frac{1}{F(x)}$ ne nous donnent pas une solution des équations (1). En effet, si l'on appelle A_n le $n^{\text{ième}}$ résidu, on trouve

$$A_n = -\frac{2\sqrt{a_n}}{\sin\sqrt{a_n}} = \pm(2n-1)\pi,$$

et la série ΣA_n n'est pas convergente.

Je me réserve de revenir plus tard sur ces importantes questions, que je ne fais ici qu'effleurer, et j'ai hâte d'arriver à des équations se rapprochant davantage de celles qui ont été traitées par M. Appell.

J'envisagerai alors une série doublement infinie de nombres

$$\ldots,\ a_{-n},\ \ldots,\ a_{-2},\ a_{-1};\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

tels que

$$|a_{n+1}| > |a_n|,\quad \lim|a_n| = \infty \text{ ou } 0 \quad \text{pour } n = +\infty \text{ ou } -\infty,$$

et je formerai les équations

$$(2)\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n a_n^p = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, \text{ad inf.}).$$

On reconnaît aisément ici les équations mêmes traitées par M. Appell : il suffit d'y donner aux lettres qui y entrent des valeurs convenables, comme on le verra d'ailleurs plus loin.

Formons une fonction $F(x)$, admettant les a pour zéros et n'ayant pas de pôles. Ce ne sera pas une fonction entière, mais une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan, sauf à l'origine, qui est un point singulier essentiel.

Soit une série doublement infinie de cercles

$$\ldots,\ C_{-n},\ \ldots,\ C_{-2},\ C_{-1};\ C_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n,\ \ldots,$$

ayant pour centre l'origine, et tel que le rayon de C_n soit, quel que soit n, compris entre $|a_n|$ et $|a_{n+1}|$. Soit J_{np} l'intégrale

$$\int \frac{x^p\,dx}{F(x)},$$

prise le long du cercle C_n.

Supposons que, quand n tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, J_{np} tende vers 0. Alors les résidus de la fonction $\frac{1}{F(x)}$ satisferont aux équations proposées ; c'est le résultat que nous avions trouvé plus haut dans le cas des équations (1).

Appliquons-le aux équations de M. Appell en reprenant les notations de ce géomètre.

Il s'agit de déterminer les coefficients A_μ du développement

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_\mu e^{\mu x},$$

par l'identité

$$(3)\qquad \Theta_1\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) = \Theta\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) \Sigma A_\mu e^{\mu x},$$

et l'on est ainsi conduit aux équations suivantes

$$(-1)^n = \Sigma(-1)^\mu q^{-2\mu n} A_\mu q^{\mu^2},$$

que nous écrirons, pour rétablir la symétrie et l'homogénéité, sous la forme

$$(4) \qquad \Sigma_\mu H_\mu (q^{-2\mu})^n + B(-1)^n = 0,$$

en faisant

$$H_\mu = (-1)^\mu A_\mu q^{\mu^2}.$$

Il faudra ensuite faire $B = -1$ dans le résultat.

Dans les équations (4) le nombre n peut prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. L'analogie des équations (4) avec les équations (2) est d'ailleurs évidente, et les quantités a sont -1 d'une part, et d'autre part $q^{-2\mu}$, où μ prend toutes les valeurs positives et négatives, et même la valeur 0.

La fonction $F(x)$ s'écrira alors

$$(x-1)(x+1)\Pi_\mu \left[1 - q^{2\mu}\left(x + \frac{1}{x}\right) + q^{4\mu}\right] = \lambda(x+1)\sqrt{x}\,\theta_1(\log x).$$

Dans cette identité λ est une constante qu'il est inutile de déterminer davantage, et θ_1 est la fonction qui est désignée ainsi par MM. Briot et Bouquet, en supposant la première période ω égale à $2i\pi$. Nous écrirons alors, pour abréger,

$$\theta_1(\log x) = \Phi(x)$$

et $\Phi(x)$ sera une fonction admettant l'origine comme point singulier essentiel, holomorphe dans tout le reste du plan, et jouissant de la propriété

$$(5) \qquad x\Phi(q^2 x) = h\Phi(x),$$

h étant une constante qu'il est inutile de déterminer davantage.

Soit maintenant une infinité de cercles C_μ ayant leurs centres à l'origine, et soit ρ_μ le rayon de C_μ. Nous prendrons

$$|q|^2 \rho_{\mu+1} = \rho_\mu.$$

Soient $J_{\mu n}$, $K_{\mu n}$ et $\Lambda_{\mu n}$ les intégrales

$$\int \frac{x^n\,dx}{(x+1)\Phi(x)\sqrt{x}}, \quad \int \frac{x^n\,dx}{\Phi(x)},$$

prises le long de C_μ. On aura évidemment

$$|J_{\mu n}| < K_{\mu n},$$

puisque le module d'une somme est plus petit que la somme des modules des éléments.

On aura, d'autre part,

$$K_{\mu n} < \frac{1}{m} \Lambda_{\mu n},$$

m étant la plus petite valeur absolue que puisse prendre

$$\sqrt{x}(x+1)$$

le long du cercle d'intégration; ou bien

$$K_{\mu n} < \frac{1}{\sqrt{\rho_\mu}\,|\rho_\mu - 1|} \Lambda_{\mu n},$$

$$\Lambda_{\mu+1 \cdot n} = \Lambda_{\mu n} \frac{h}{q^{4n+2}} \frac{1}{\rho_\mu}.$$

Faisons tendre μ vers $+\infty$, ρ_μ tend vers ∞, le rapport $\frac{\Lambda_{\mu+1 \cdot n}}{\Lambda_{\mu \cdot n}}$ tend vers o et par conséquent $\Lambda_{\mu n}$ tend vers o.

Si, au contraire, μ tend vers $-\infty$, ρ_μ tend vers o, le rapport $\frac{\Lambda_{\mu+1 \cdot n}}{\Lambda_{\mu \cdot n}}$ tend vers ∞ et $\Lambda_{\mu n}$ tend encore vers o.

On en conclurait aisément que l'intégrale $J_{\mu n}$ tend elle-même vers o quand μ tend vers $\pm\infty$, quelle que soit la valeur entière positive ou négative de n.

Donc, d'après les principes posés plus haut, les résidus de la fonction

$$\frac{1}{\lambda(x+1)\Phi(x)\sqrt{x}},$$

satisferont aux équations (4).

On trouve ainsi

$$B = \frac{-1}{2\Pi(1+q^{2\mu})^2}, \quad H_0 = \frac{1}{2\Pi(1-q^{2\mu})^2},$$

$$\frac{1}{H_\mu} = (q^{-4\mu} - 1)(q^{6\mu} - q^{2\mu})^2 \Pi(1 - q^{2\nu+2\mu}) \Pi(1 - q^{2\nu-2\mu}),$$

où ν prend toutes les valeurs 1, 2, ... ad inf., à l'exception de la valeur μ, ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{H_\mu} = - q^{-2\mu}(1 - q^{4\mu})^2 \Pi(1 - q^{2\mu+2\nu}) \Pi(1 - q^{2\nu-2\mu}),$$

ν étant toujours soumis à la même restriction, ou bien

$$\frac{1}{H_\mu} = - q^{-2\mu}(1 - q^{4\mu}) \Pi(1 - q^{2\omega}),$$

le nombre entier ω pouvant prendre :

1° Une fois toutes les valeurs négatives depuis $1 - \mu$ jusqu'à -1;

2° Une fois toutes les valeurs positives depuis 1 jusqu'à μ;

3° Deux fois toutes les valeurs positives depuis $\mu + 1$ jusqu'à $+\infty$.

Mais nous pouvons écrire

$$\prod_{\omega=1-\mu}^{\omega=-1} (1 - q^{2\omega}) = \Pi(- q^{2\omega}) \Pi(1 - q^{-2\omega}) = (-1)^{\mu-1} q^{-\mu(\mu-1)} \Pi(1 - q^{-2\omega}),$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{1}{H_\mu} = - q^{-2\mu}(1 - q^{4\mu}) \Pi(1 - q^{2\omega}) [(-1)^{\mu-1} q^{-\mu(\mu-1)}]$$

(ω pouvant prendre deux fois toutes les valeurs positives depuis 1 jusqu'à l'infini, à l'exception de la valeur μ que ce nombre ne peut prendre qu'une seule fois), ou enfin

$$\frac{1}{H_\mu} = (-1)^\mu q^{-\mu^2-\mu}(1 + q^{2\mu}) \Pi(1 - q^{2\nu})^2,$$

le nombre ν pouvant prendre une fois et une seule toutes les valeurs entières positives. On a ainsi, pour la valeur définitive de H_μ,

$$H_\mu = (-1)^\mu q^{\mu^2} \frac{q^\mu}{1 + q^{2\mu}} \frac{1}{\Pi(1 - q^{2\nu})^2}.$$

Nous allons maintenant multiplier les quantités B, H_0 et H_μ que nous venons de trouver par le facteur $2\Pi(1 + q^{2\nu})^2$, de façon à ramener B à sa valeur -1 et nous trouverons, en revenant aux notations de M. Appell et posant comme lui

$$Q = \prod \left(\frac{1+q^{2\nu}}{1+q^{-2\nu}}\right)^2,$$

$$B = 1, \quad H_0 = Q, \quad H_\mu = (-1)^\mu q^{\mu^2} \frac{2q^\mu}{1+q^{2\mu}} Q$$

et enfin

$$A_0 = Q, \quad A_\mu = \frac{2q^\mu}{1+q^{2\mu}} Q, \quad A_\mu = -A_{-\mu}.$$

Nous avons donc retrouvé la solution de M. Appell, et je ne crois pas qu'on puisse faire d'objection à la méthode que je propose pour démontrer que cette solution satisfait effectivement aux équations (4).

Mais cette solution n'est pas unique. Il est clair en effet que les quantités

$$B = -1, \quad H'_\mu = H_\mu[c(-q^{2\mu})^p + d(-q^{2\mu})^{-p}]$$

(où p est entier et où $c + d = 1$) ainsi que les combinaisons linéaires de pareilles quantités satisferont, comme les quantités H_μ elles-mêmes, à ces mêmes équations.

Il arrive, si $c = d$, que l'on a encore

$$H'_\mu = H'_{-\mu}.$$

Les équations (4) admettent donc une infinité de solutions et cependant il est clair qu'il n'y a qu'un seul développement convergent

$$\Sigma A_\mu e^{\mu x},$$

qui puisse satisfaire à l'identité (3).

On doit en conclure que, parmi les solutions en nombre infini qui satisfont à nos équations (4), il n'y en a qu'une seule qui conduise à un développement $\Sigma A_\mu e^{\mu x}$ convergent. Il est d'ailleurs aisé de voir que cette solution est celle de M. Appell.

En effet, si nous posons

$$A_\mu^p = (-1)^p \frac{q^{(2p+1)\mu}}{1+q^{2\mu}} Q,$$

on vérifiera que A_μ^p est une solution des équations (4) pour toutes les valeurs entières de p, mais que la série $\Sigma A_\mu^p e^{\mu x}$ est convergente pour $p = 0$ et pour $p = 0$ seulement.