Bulletin de la S. M. F.

Maurice D'Ocagne

Sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 71-83
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__71_2>

Sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes; par M. Maurice d'Ocagne.

(Séances des 4 et 18 février et du 4 mars 1885.)

1. Étant donné un système (C) de courbes planes, considérons des courbes K, formant le système (K), telles que les arcs de ces courbes, compris entre deux quelconques des courbes du système (C), soient tous égaux entre eux. Nous dirons que les courbes K sont des *trajectoires isométriques* du système (C).

Il est bien évident que, pour un système (C) donné, il existe une infinité de systèmes de trajectoires isométriques; on pourra se donner arbitrairement l'une des courbes du système (K); les autres s'en déduiront, et nous dirons qu'elles sont *isométriques de la première par rapport au système* (C). Dans la présente Note, nous nous occupons de la recherche de ces *isométriques* lorsque la courbe qu'on se donne est une droite D.

On remarquera que la définition géométrique des trajectoires isométriques se traduit par une propriété cinématique de ces courbes qui est la suivante : Si des points, situés au même instant sur une courbe du système (C), décrivent des trajectoires isométriques de ce système, en ayant tous à chaque instant la même vitesse, ils se trouveront constamment ensemble sur une même courbe du système (C).

2. Supposons les axes rectangulaires, l'axe des y étant parallèle à la droite D donnée, et à la distance a de cette droite, soit

$$F(x, y, \lambda) = 0, \tag{1}$$

où λ est un paramètre arbitraire, l'équation des courbes du système (C). L'ordonnée h du point où l'une des courbes C coupe la droite D est donnée par

$$F(a, h, \lambda) = 0.$$

Éliminant λ entre cette équation et la précédente, on a

$$h = \varphi(x, y), \tag{2}$$

d'où

$$dh = \varphi'_x\, dx + \varphi'_y\, dy.$$

Par suite, il vient, pour l'équation différentielle des isométriques de la droite D,

$$\varphi'_x\, dx + \varphi'_y\, dy = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{3}$$

ou

$$(\varphi'^2_y - 1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\varphi'_x \varphi'_y \frac{dy}{dx} + (\varphi'^2_x - 1) = 0. \tag{3'}$$

Cette équation du premier ordre et du deuxième degré montre qu'il existe deux systèmes d'isométriques répondant à la droite D donnée. Nous allons intégrer cette équation dans quelques cas.

3. On aperçoit immédiatement un cas assez étendu d'intégra-

tion. C'est celui où *le système* (C) *est formé par les positions successives d'une courbe invariable glissant sur le plan parallèlement à la droite* D. Nous dirons, pour abréger, qu'un tel système est *parallèle à la droite* D.

Nous placerons ici une seconde définition qui nous sera utile plus loin. Soit (C_1) un second système parallèle à D; prenons dans (C) et dans (C_1) deux courbes quelconques C et C_1; le lieu du milieu d'un segment de droite parallèle à D dont les extrémités s'appuient respectivement sur C et C_1 est une courbe K; en faisant varier les courbes C et C_1 respectivement dans les systèmes (C) et (C_1), nous obtenons un système (K) également parallèle à D. Nous dirons que *le système* (K) *est le système moyen des systèmes* (C) *et* (C_1).

Cela posé, observons que l'équation (1) est ici

$$y = f(x) + \lambda;$$

par suite, l'équation (2)

$$\lambda = y - f(x) + f(a)$$

et l'équation (3)

$$dy - f'(x)\,dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Élevant au carré, nous avons, après réduction,

$$dx^2[f'(x)^2 - 1] = 2f'(x)\,dx\,dy.$$

Supprimons le facteur dx auquel correspond la solution évidente $x = C$, c'est-à-dire les droites parallèles à D; il vient

$$dy = \frac{f'(x)^2 - 1}{2f'(x)}\,dx, \tag{4}$$

d'où, en intégrant,

$$y = \frac{1}{2}\left[f(x) - \int \frac{dx}{f'(x)}\right] + C. \tag{4 bis}$$

Or

$$y = -\int \frac{dx}{f'(x)} + C$$

est l'équation du système des trajectoires orthogonales, ou système orthogonal du système donné, système qui est aussi parallèle à la droite D; par suite, l'équation (4) représente le système moyen du système donné et du système de ses trajectoires orthogonales, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Les isométriques d'une droite (D), *par rapport à un système* (C) *parallèle à cette droite, sont données* (*en outre des droites parallèles à* D) *par le système moyen du système* (C) *et de son système orthogonal.*

Ou encore :

Si les systèmes (C) *et* (C_1), *parallèles à la droite* D, *sont orthogonaux entre eux, le système moyen de* (C) *et* (C_1) *est isométrique de la droite* D *par rapport à l'un ou à l'autre de ces deux systèmes.*

En particulier, si nous supposons que les courbes C sont des paraboles ayant leur axe dirigé suivant D,

$$y = \frac{x^2}{2p} + c,$$

leurs trajectoires orthogonales C_1 sont des logarithmiques

$$y = -\frac{p}{2}\log x + c,$$

qui ont la droite D pour asymptote, et les isométriques de la droite D par rapport à (C) ou à (C_1) sont données par

$$y = \frac{x^2}{4p} - \frac{p}{2}\log x + c.$$

On reconnaît là l'équation de la fameuse *courbe du chien* lorsque le maître parcourt la droite D et que le chien a même vitesse que son maître.

4. Il y a un cas où la solution du problème est intuitive : c'est lorsqu'il s'agit de trouver les *isométriques d'une droite par rapport à un système de cercles concentriques.* On voit immédiatement que ce sont les tangentes à celui des cercles du système qui est tangent à la droite considérée.

Analytiquement, ce résultat s'obtient bien aisément. En effet, l'équation (2) est ici

$$h = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

d'où, en posant $\frac{dy}{dx} = y'$,

$$\frac{dh}{dx} = \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}.$$

L'équation (3) devient alors

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Chassant le dénominateur, élevant au carré et réduisant, on met cette équation sous la forme

$$(y - xy')^2 = a^2(y'^2 + 1)$$

ou

$$y = xy' + a\sqrt{y'^2 + 1},$$

équation de Clairaut, d'où se déduit immédiatement le résultat indiqué plus haut.

5. *Isométriques d'une droite* D *par rapport à un système de droites concourantes.* — Nous prenons pour origine O le point de concours de ces droites (dont la distance à la droite D est a), pour axe des x et pour axe des y la perpendiculaire et la parallèle à D, menées par O.

L'équation (2) est, dans ce cas,

$$h = \frac{ay}{x};$$

par suite,

$$dh = a\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2},$$

et il vient, en posant $\frac{dy}{dx} = y'$, pour l'équation différentielle de la courbe,

$$(5) \qquad xy' - y = \frac{x^2}{a}\sqrt{1 + y'^2}.$$

Dérivons les deux membres de cette équation par rapport à x; il vient, après division par x, ce qui ne supprime aucune solution géométrique du problème,

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{2\sqrt{1 + y'^2}}{a} + \frac{xy'}{a\sqrt{1 + y'^2}}\frac{dy'}{dx},$$

équation que nous pouvons écrire

$$\frac{dx}{dy'} + x\frac{y'}{2(1+y'^2)} = \frac{a}{2\sqrt{1+y'^2}}.$$

Sous cette forme on voit qu'elle est linéaire et du premier ordre en x considéré comme fonction de y', et l'on a, par application de la formule connue, et en désignant par C une constante arbitraire,

$$x = e^{-\int \frac{y'}{2(1+y'^2)}dy'}\left[C + a\int e^{\int \frac{y'}{2(1+y'^2)}dy'} \frac{dy'}{2\sqrt{1+y'^2}}\right],$$

ou, en remarquant que $\int \frac{y'}{2(1+y'^2)}dy' = \log\sqrt[4]{1+y'^2}$, et que $e^{\log\sqrt[4]{1+y'^2}} = \sqrt[4]{1+y'^2}$,

$$x = \frac{C + a\int \frac{dy'}{2\sqrt[4]{1+y'^2}}}{\sqrt[4]{1+y'^2}}. \tag{6}$$

Occupons-nous maintenant de l'intégrale $I = \int \frac{dy'}{2\sqrt[4]{1+y'^2}}$, qui figure dans la solution.

Si nous effectuons le changement de variable $\sqrt{1+y'^2} = v^2$, nous voyons que cette intégrale prend la forme

$$I = \int \frac{v^2\,dv}{\sqrt{v^4-1}},$$

et que les formules (5) et (6) donnent pour x et y les valeurs

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{C + a\int \frac{v^2\,dv}{\sqrt{v^4-1}}}{v}, \\ y &= x\left(\sqrt{v^4-1} - xv^2\right). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

L'intégrale I appartient à la classe des intégrales elliptiques de seconde espèce; nous allons essayer de la ramener à la forme normale, ce qui nous permettra ensuite de l'exprimer au moyen des fonctions Θ.

Si nous effectuons le changement de variable $v = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, nous voyons que l'intégrale I prend la forme

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{t^2}{2}\right)}}.$$

Elle semble alors, à première vue, rentrer dans la catégorie des intégrales elliptiques de troisième espèce, prises sous la forme normale que leur a donnée Legendre; mais il n'en est rien, parce que, au dénominateur, les zéros de la partie extérieure au radical sont aussi des zéros de la partie soumise à ce radical.

Si nous posons

$$t = \operatorname{sn} u \quad \left(K = \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

nous voyons que

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\operatorname{cn}^2 u};$$

or les formules (43) et (45) du *Traité des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet (2e édition, p. 260) donnent

$$\frac{1}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{1}{g^2 K'^2}\left[\frac{\Theta''_2(0)}{\Theta_2(0)} - D_u^2 \log \Theta_2(u)\right].$$

Ici, le multiplicateur g est égal à 1, et

$$K'^2 = 1 - K^2 = \tfrac{1}{2}:$$

par suite,

$$\frac{1}{\operatorname{cn}^2 u} = 2\left[\frac{\Theta''_2(0)}{\Theta_2(0)} - D_u^2 \log \Theta_2(u)\right]$$

et

$$I = \sqrt{2}\left[\frac{\Theta''_2(0)}{\Theta_2(0)} u - \frac{\Theta'_2(u)}{\Theta_2(u)}\right].$$

Un calcul bien facile montre que x et y sont alors donnés par

$$(8)\quad \begin{cases} x = \operatorname{cn} u \left\{ C + a\sqrt{2}\left[\frac{\Theta''_2(0)}{\Theta_2(0)} u - \frac{\Theta'_2(u)}{\Theta_2(u)}\right]\right\}, \\ y = \frac{x}{\operatorname{cn}^2 u}\left(\operatorname{sn} u \sqrt{1 + \operatorname{cn}^2 u} - x\right). \end{cases}$$

x et y se trouvent ainsi exprimés au moyen des notations classiques, mais il eût été plus simple de faire usage des notations de

M. Weierstrass (¹). Si, en effet, dans l'intégrale I prise sous la forme $\int \frac{v^2\,dv}{\sqrt{v^4-1}}$, on effectue le changement de variable $v^2 = w$, on a

$$I = \int \frac{w\,dw}{\sqrt{4w^3-4w}}.$$

En posant

$$u = \int_\infty^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3-4w}},$$

on a

$$w = p(u)$$

et

$$\int \frac{w\,dw}{\sqrt{4w^3-4w}} = \int p(u)\,du = -\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)};$$

par suite,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{C - a\dfrac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}}{\sqrt{p(u)}},\\ y &= x\left[\sqrt{p(u)^2-1} - x\,p(u)\right].\end{aligned}\right.$$

Les quantités que M. Weierstrass désigne par g_2 et g_3, et qui remplacent le module, sont ici $g_2 = 4$, $g_3 = 0$.

6. *Isométriques d'une droite par rapport à un système d'hyperboles équilatères de mêmes asymptotes, l'une de ces asymptotes étant parallèle à la droite donnée.* — Nous prenons naturellement ces asymptotes pour axes de coordonnées. L'équation (2) est, dans ce cas,

$$h = \frac{xy}{a};$$

par suite,

$$dh = \frac{x\,dy + y\,dx}{a},$$

(¹) Voir à ce sujet, p. 77 et suivantes, du *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables*, par M. Halphen (*Recueil des Savants étrangers*, t. XXVIII) et, du même auteur, la *Note sur l'inversion des intégrales elliptiques* (*Journal de l'École Polytechnique*, LIVᵉ Cahier).

et l'équation (3) devient, en posant $\frac{dy}{dx} = y'$,

(10) $$y + xy' = a\sqrt{1+y'^2}.$$

Prenant les dérivées des deux membres par rapport à x, nous avons

$$2y' + x\frac{dy'}{dx} = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{dy'}{dx},$$

équation que nous pouvons écrire

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{x}{2y'} = \frac{a}{2\sqrt{1+y'^2}}.$$

Cette équation linéaire et du premier ordre en x, considéré comme fonction de y', s'intègre immédiatement par la formule

$$x = e^{-\int\frac{dy'}{2y'}}\left[C + \int e^{\int\frac{dy'}{2y'}}\frac{a\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right].$$

Remarquant que $\int\frac{dy'}{2y'} = \log\sqrt{y'}$, et que $e^{\log\sqrt{y'}} = \sqrt{y'}$, on a

(11) $$x = \frac{1}{\sqrt{y'}}\left[C + \frac{a}{2}\int\frac{dy'}{\sqrt{y'(1+y'^2)}}\right].$$

Ici, l'emploi des notations de M. Weierstrass est tout indiqué; car, si nous prenons l'intégrale qui figure dans la valeur de x sous la forme $\int\frac{dy'}{\sqrt{4y'^3+4y'}}$, et que nous posions

$$u = \int_\infty^{y'}\frac{dy'}{\sqrt{4y'^3+4y'}} \quad (g_2 = -4,\ g_3 = 0),$$

nous avons

$$y' = \wp(u),$$

et, par suite, en remarquant, comme l'a fait M. Halphen [1], que $1+\wp(u)^2 = \frac{\wp'(u)^2}{4\wp(u)}$,

(12) $$\begin{cases} x = \dfrac{C+au}{\sqrt{\wp(u)}}, \\ y = \dfrac{a\wp'(u) - (C+au)\wp(u)}{\sqrt{\wp(u)}}. \end{cases}$$

---

[1] *Recueil des Savants étrangers*, t. XXVIII, p. 87.

Ces formules résolvent le problème, mais nous allons faire voir comment on aurait pu pousser la solution au moyen des notations classiques.

Reprenons l'intégrale

$$I = \int \frac{dy'}{\sqrt{y'(1+y'^2)}}.$$

Si nous posons $y' = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$, nous voyons, par un calcul facile, que l'intégrale I prend la forme

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

Si nous faisons maintenant $\sin\theta = \cos^2\varphi$, nous avons

$$d\theta = -\frac{2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\cos^4\varphi}} = -\frac{2\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}, \quad \sqrt{\sin\theta} = \cos\varphi$$

et, par suite,

$$I = -\sqrt{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} = -\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Nous sommes ainsi amenés à la forme trigonométrique normale de l'intégrale elliptique de première espèce pour la valeur $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$ du module. Si donc nous posons

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

nous avons

$$y' = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\cos^2\varphi}{1+\sqrt{1-\cos^4\varphi}} = \frac{\operatorname{cn}^2 u}{1+\operatorname{sn} u\sqrt{1+\operatorname{cn}^2 u}},$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{2}{\sqrt{1+\operatorname{sn} u\sqrt{1+\operatorname{cn}^2 u}}}$$

et, par suite, en vertu de (11) et de (10),

$$(13)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\left(C - \dfrac{au}{2}\right)\sqrt{1+\operatorname{sn} u\sqrt{1+\operatorname{cn}^2 u}}}{\operatorname{cn} u}, \\[2ex] y = \dfrac{-\left(C - \dfrac{au}{2}\right)\operatorname{cn} u + 2a}{\sqrt{1+\operatorname{sn} u\sqrt{1+\operatorname{cn}^2 u}}}. \end{cases}$$

7. *Isométriques d'une droite par rapport à un système de cercles passant tous par un point de la droite et ayant tous leur centre sur cette droite.* — Ici nous prendrons la droite pour axe des x, l'origine étant au point de cette droite commun à tous les cercles.

Soit h le diamètre du cercle du système, qui passe par le point (x, y) de l'une des isométriques cherchées. On a

$$h = \frac{x^2+y^2}{x};$$

d'où

$$\frac{dh}{dx} = \frac{2x(x+yy')-(x^2+y^2)}{x^2}.$$

Par suite, l'équation différentielle cherchée sera

$$\begin{aligned}\sqrt{1+y'^2} &= \frac{2x(x+yy')-(x^2+y^2)}{x^2}\\ &= 1+2y'\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2} = (1+y'^2)-\left(\frac{y}{x}-y'\right)^2,\end{aligned}$$

que nous pourrons écrire

(14) $$y = x\left(y'+\sqrt{1+y'^2-\sqrt{1+y'^2}}\right).$$

Après avoir posé

$$R(y') = \sqrt{1+y'^2-\sqrt{1+y'^2}},$$

dérivons les deux membres de l'équation précédente par rapport à x; nous avons, après réduction,

$$x[1+R'_{y'}(y')]\frac{dy'}{dx}+R(y') = 0,$$

que nous pourrons écrire

$$\frac{dx}{x}+\frac{R'_{y'}(y')}{R(y')}dy'+\frac{dy'}{R(y')} = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$\log x+\log R(y')+\int\frac{dy'}{R(y')} = c.$$

ou

(15) $$x\,R(y')\,e^{\int\frac{dy'}{R(y')}} = C,$$

C étant une constante arbitraire.

Reste à trouver la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int \frac{dy'}{\mathrm{R}(y')} = \int \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2 - \sqrt{1+y'^2}}}.$$

Si nous posons $\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{v}$, nous avons

$$dy' = \frac{-dv}{v^2\sqrt{1-v^2}}$$

et, par suite,

$$\mathrm{I} = -\int \frac{dv}{v^2\sqrt{1-v^2}\sqrt{\frac{1}{v^2}-\frac{1}{v}}} = -\int \frac{dv}{v(1-v)\sqrt{1+v}}.$$

Faisons maintenant $\sqrt{1+v} = t$; il vient

$$\mathrm{I} = -2\int \frac{t\,dt}{(t^2-1)(2-t^2)t} = 2\int \frac{dt}{(t^2-1)(t^2-2)}.$$

Décomposant cette fraction rationnelle en fractions simples, on trouve bien aisément pour valeur de I

$$\mathrm{I} = \log\left[\frac{t+1}{t-1}\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]$$

et, par suite,

$$e^{\mathrm{I}} = \frac{t+1}{t-1}\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

D'ailleurs

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{v} = \frac{1}{t^2-1}.$$

L'équation (15) devient donc

$$x\frac{\sqrt{2-t^2}}{t^2-1}\,\frac{t+1}{t-1}\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \mathrm{C}$$

ou

(16) $$x = \mathrm{C}\,\frac{(t-1)^2}{\sqrt{2-t^2}}\left(\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}};$$

On a aussi

$$y'^2 = \frac{1}{(t^2-1)^2} - 1 = \frac{t^2(2-t^2)}{(t^2-1)^2}$$

et, par suite,

$$y' + \sqrt{1 + y'^2 - \sqrt{1 + y'^2}} = \frac{t\sqrt{2 - t^2}}{t^2 - 1} + \frac{\sqrt{2 - t^2}}{t^2 - 1} = \frac{\sqrt{2 - t^2}}{t - 1}.$$

Dès lors, les formules (14) et (16) donnent pour la valeur de y

$$y = C(t - 1)\left(\frac{t + \sqrt{2}}{t - \sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}. \tag{17}$$

Les formules (16) et (17) résolvent le problème.