BULLETIN DE LA S. M. F.

BIOCHE

# Sur un mémoire de Poisson

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 14 (1886), p. 13-18
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__13_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

### *Sur un Mémoire de Poisson;* par M. Bioche, professeur au lycée de Poitiers.

(Séance du 18 novembre 1885.)

1. Dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences en 1832 et publié la même année dans le *Journal de Crelle* et dans le *Journal de l'École Polytechnique,* Poisson, après avoir rappelé les théorèmes d'Euler et de Monge, ajoute les observations suivantes :

« Les théorèmes sur la courbure des surfaces que nous venons de rappeler supposent évidemment que les tangentes à toutes les sections faites par ce point que l'on considère sont dans un même plan, ou autrement dit qu'il n'y a en ce point qu'un plan tangent; mais il existe des surfaces où le plan tangent est unique et où cependant ces théorèmes n'ont pas lieu. En ces points singuliers, la direction des lignes de courbure n'est pas indéterminée comme dans les ombilics, mais leur nombre est plus grand que deux; il peut être quatre ou six ou tout autre nombre pair et le rayon de courbure d'une section normale est susceptible de plusieurs maxima et minima dont le nombre total est toujours égal à celui des lignes de courbure. »

Je me propose de faire voir que, lorsque des points de l'espèce considérée par Poisson se rencontrent sur des surfaces algébriques, ces points ne sont pas simples, comme l'expression de *plan tangent unique* pourrait le faire croire. Il peut arriver, il est vrai, que la surface, lieu des tangentes, se réduise à un plan double ou se décompose en un plan et des cônes imaginaires, de sorte que les tangentes réelles de la surface sont bien toutes dans un même plan. C'est pourquoi il m'a semblé utile de bien préciser la nature de la singularité, d'autant plus qu'il résulte de ce qui suit que les théorèmes de Monge et d'Euler s'appliquent *sans exception* à tous les points simples des surfaces algébriques.

Poisson donnait comme exemple les surfaces représentées par l'équation

$$2z = n^2 \sin u\theta,$$

$n$ étant un nombre entier; $z$, $u$, $\theta$ des coordonnées semi-polaires. Le rayon de courbure étant donné par

$$\frac{1}{R} = \sin n\theta,$$

on peut disposer de $u$ pour lui donner autant de maxima et minima que l'on veut. Les sections normales de la surface sont des paraboles dont le sommet est à l'origine; les tangentes forment donc un plan. Mais, si l'on transforme l'équation en passant aux coordonnées cartésiennes, on voit que l'origine est un point multiple; l'axe des $z$ étant une ligne multiple de la surface si $n > 2$. Pour $n = 2$ on retrouve le paraboloïde hyperbolique, pour $n = 1$ une surface qui a deux nappes tangentes entre elles à l'origine. L'équation en coordonnées cartésiennes et l'équation en coordonnées semi-polaires ne sont donc pas équivalentes en général.

**2.** Sans insister davantage sur un exemple particulier, reprenons l'expression générale du rayon de courbure d'une section normale

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha;$$

pour que R soit susceptible de plus de deux maxima ou minima, il faut que les dérivées partielles $r$, $s$, $t$ de $z$ dépendent de l'angle $\alpha$. C'est ce qui ne peut avoir lieu en un point simple d'une surface algébrique.

En effet, une surface algébrique étant représentée par l'équation

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

on ne peut avoir à la fois en un point simple

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0, \qquad \frac{dF}{dz} = 0.$$

Or, si l'origine est un point simple, le plan tangent étant le plan des $xy$, on doit avoir

$$p = 0, \qquad q = 0.$$

En différentiant l'équation, (1) on trouve

$$\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz} = 0; \tag{2}$$

puisque, au point considéré, $p$ et $q$ sont nuls, on a

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0$$

et, en vertu de la remarque que l'on vient de faire, il faut que

$$\frac{dF}{dz} \neq 0.$$

De plus $\frac{dF}{dz}$ a une valeur bien déterminée lorsqu'on y fait $x = y = z = 0$, puisque c'est un polynôme entier par rapport à ces variables.

Pour avoir les dérivées $r$, $s$, $t$, je différentie les équations (2)

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2F}{dx^2} + 2p\frac{d^2F}{dx\,dz} + p^2\frac{d^2F}{dz^2} + r\frac{dF}{dz} = 0,\\
&\frac{d^2F}{dx\,dy} + q\frac{d^2F}{dy\,dz} + p\frac{d^2F}{dx\,dz} + pq\frac{d^2F}{dz^2} + s\frac{dF}{dz} = 0,\\
&\frac{d^2F}{dy^2} + 2q\frac{d^2F}{dy\,dz} + q^2\frac{d^2F}{dz^2} + t\frac{dF}{dz} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Les équations précédentes donnent pour $r$, $s$, $t$ un système de valeurs unique lorsqu'on fait $x = y = z = 0$; car les coefficients des inconnues ont une valeur déterminée différente de zéro; les termes indépendants qui se réduisent à $\frac{d^2F}{dx^2}$, $\frac{d^2F}{dx\,dy}$, $\frac{d^2F}{dz^2}$, puisque $p$ et $q$ sont nuls, sont également bien déterminés, puisque ce sont des polynômes en $x$, $y$, $z$.

Les points singuliers signalés par Poisson sont donc des points multiples.

3. J'ajouterai une autre remarque. Poisson dit que le nombre total des lignes de courbure est toujours égal au nombre des maxima et des minima du rayon de courbure. Il peut arriver que le premier nombre soit supérieur au second.

En effet, supposons qu'en un point multiple quelconque d'une surface le rayon de courbure d'une section normale s'exprime par

$$\frac{1}{R} = \varphi(\theta);$$

en remplaçant les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées semi-polaires dans l'équation connue qui donne les directions des lignes de courbure, on trouve que cette équation se transforme en la suivante :

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 0.$$

Il en résulte bien que les sections de plus grande ou de moins grande courbure sont des lignes de courbure; mais il peut y avoir des valeurs de $\theta$ qui vérifient l'équation $\frac{d\varphi}{d\theta} = 0$ sans rendre $\varphi$ maximum ou minimum. Le nombre des lignes de courbure peut donc être supérieur à celui des lignes de plus grande ou moins grande courbure.

Pour m'assurer qu'il en est bien ainsi et que toutes les racines de l'équation en $\theta$ donnent des lignes de courbure, je me sers de la méthode dont Poisson s'est servi pour le cas des ombilics. En général, aucune normale MN à une surface n'est rencontrée rigoureusement par une normale voisine $M_1N_1$, quelque rapprochés que soient les points de la surface $M$, $M_1$ auxquels elles répondent. Si l'on appelle $\Delta$ leur plus courte distance, $\Delta$ sera du même ordre que la distance $u$ des deux points pour une direction quelconque. Ce qui caractérise une ligne de courbure, c'est que $\frac{\Delta}{u}$ devient infiniment petit en même temps que $u$.

Or, OZ étant normale à la surface considérée, la distance $\Delta$ d'une normale voisine à OZ est

$$\Delta = \frac{qx - py}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$p, q, x, y$ correspondant au pied de la seconde normale

$$\frac{\Delta}{u} = \frac{q\cos\theta - p\sin\theta}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

et enfin

$$\lim\frac{\Delta}{u} = \frac{\varphi'(\theta)}{\sqrt{4\varphi^2(\theta)+\varphi'^2(\theta)}}.$$

Donc toutes les directions $\theta$ qui annulent $\varphi'(\theta)$ donnent des directions de lignes de courbure, sans qu'il soit nécessaire que la courbure devienne maxima ou minima.

Soit, par exemple, la surface

$$2z = u^2(\cos^3\theta + 2),$$

on a

$$\frac{1}{R} = \cos^3\theta + 2,$$

$$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{R} = -3\cos^2\theta\sin\theta.$$

La section d'azimut $\theta = \frac{\pi}{2}$ n'est pas une section de courbure maxima ou minima, car la dérivée ne change pas de signe; mais cet azimut correspond à une direction de ligne de courbure.

On peut remarquer encore qu'il résulte de l'expression de $\frac{\Delta}{u}$ que le plan tangent en un point d'une ligne de courbure est perpendiculaire à la section normale correspondant à cette ligne, comme dans le cas des points simples, de sorte que, d'une façon générale, les lignes de courbure sont les lignes perpendiculaires aux directions conjuguées, si l'on donne de ces directions la définition que donne Dupin dans ses *Développements de Géométrie*.

4. Enfin, si l'équation $\varphi(\theta)$ a des racines, les sections correspondantes ont des courbures nulles : on peut donc les considérer comme déterminant des directions de lignes asymptotiques.

Donc, les lignes asymptotiques étant données par

$$\varphi(\theta) = 0$$

et les lignes de courbure par

$$\varphi'(\theta) = 0,$$

si le théorème de Rolle est applicable à la première équation, le nombre des lignes de courbure est au moins égal à celui des lignes asymptotiques, car deux lignes asymptotiques sont toujours séparées par un nombre impair de lignes de courbure.