BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FOURET

Sur la recherche de deux courbes planes ou surfaces, dont les points se correspondent chacun à chacun, à la fois par homologie et par polaires réciproques

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 18-20

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__18_1>

Sur la recherche de deux courbes planes, ou surfaces, dont les points se correspondent chacun à chacun, à la fois par homologie et par polaires réciproques; par M. G. Fouret.

(Séance du 18 novembre 1885.)

Le problème qui fait l'objet de cette Note a déjà été, en ce qui concerne les courbes planes, posé et résolu analytiquement par M. d'Ocagne [1]. Nous allons en donner une nouvelle solution entièrement géométrique, et nous l'étendrons ensuite au problème analogue relatif aux surfaces.

La question traitée par M. d'Ocagne peut s'énoncer de la manière suivante :

Trouver dans un plan deux courbes (C) *et* (C′), *polaires réciproques par rapport à une conique* (K), *et telles que la droite joignant un point quelconque* M *de l'une d'elles au point* M′ *de contact avec l'autre de la polaire de* M *par rapport à* (K) *passe par un point fixe* O.

Il est clair, d'abord, que les conditions imposées dans cet énoncé à (C) et à (C′) impliquent l'homologie de ces deux courbes. En effet, soit Δ la polaire du point O par rapport à la conique (K). Puisque les points M et M′ sont en ligne droite avec O, la tangente en M à (C), qui est la polaire de M′, et la tangente en M′ à (C′), qui est la polaire de M, se couperont sur Δ. Par conséquent (C) et (C′) seront homologiques par rapport au point O, *centre d'homologie,* et à la droite Δ, *axe d'homologie.*

Considérons maintenant le point T, où la tangente à (C), en un point quelconque M, coupe Δ. La polaire de T par rapport à (K)

(1) *Bulletin de la Société mathématique,* t. XIII, p. 204.

est OM, puisque cette droite contient le point O, pôle de Δ, et le point M′, qui est le pôle de MT. Par suite, les droites MO et MT sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites MA et MB, qui joignent le point M aux points A et B d'intersection de Δ et de (K). La courbe cherchée (C) doit donc être telle que la tangente, en l'un quelconque de ses points M, soit conjuguée harmonique de MO par rapport à MA et à MB [1]. Transformons homographiquement cette courbe, en faisant coïncider les points A et B avec les ombilics, ou points communs à tous les cercles du plan. La proportion harmonique, qui se conserve, entre les droites MO, MA, MB et MT, exprime alors que la tangente, en un point quelconque de la courbe transformée, est constamment perpendiculaire à la droite qui joint ce point au point Ω transformé de O.

La transformée homographique de (C) est par suite un cercle ayant Ω pour centre, et la courbe (C) elle-même est l'une quelconque des coniques tangentes respectivement en A et B à OA et à OB, c'est-à-dire bitangentes à la conique (K), en ses points de rencontre avec la droite Δ. La seconde courbe cherchée sera la conique polaire réciproque de (C) par rapport à (K). Nous retrouvons ainsi le résultat que M. d'Ocagne avait obtenu par le calcul.

Proposons-nous maintenant de *trouver deux surfaces* (S) *et* (S′), *polaires réciproques par rapport à une quadrique* (Q), *et telles que la droite joignant un point* M *quelconque de la première au point* M′ *de contact avec la seconde du plan polaire de* M *par rapport à* (Q) *passe par un point fixe* O.

On voit immédiatement, comme pour le problème précédent, que les surfaces cherchées doivent être homologiques par rapport au point O, *centre d'homologie,* et au plan polaire Π de O par rapport à la quadrique (Q), qui est le *plan d'homologie.* D'ailleurs, en coupant les surfaces (S), (S′) et la quadrique (Q) par un plan quelconque P passant par le point O, nous obtiendrons deux courbes (C), (C′), et une conique (K), par rapport à laquelle (C) et (C′) seront polaires réciproques, en même temps qu'elles seront

---

[1] C'est un cas particulier des courbes *anharmoniques,* qui s'obtiennent, comme nous l'avons fait voir, par l'intégration de l'équation de Jacobi (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXXVIII, p. 1693 et 1837).

homologiques par rapport au point O, centre d'homologie, la droite Δ d'intersection des plans P et Π étant l'axe d'homologie.

Par suite, ainsi que nous l'avons démontré plus haut, les courbes (C) et (C′) seront des coniques bitangentes entre elles et à la conique (K), en leurs points communs d'intersection avec Δ. On en conclut que les surfaces cherchées (S) et (S′) sont des quadriques circonscrites à la quadrique (Q), le long de son intersection avec le plan Π.