BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur une suite récurrente

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 20-41

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__20_1>

Sur une suite récurrente; par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 18 novembre 1885.)

1. Le sujet traité dans le présent Mémoire, quoique élémentaire par le fond, se prête, comme nous espérons le faire voir, à des développements assez curieux.

Nous y envisageons une notion nouvelle qu'on pourrait, sans doute, faire intervenir dans d'autres genres de questions, et dont voici la définition.

Supposons que des quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ dépendent de certains paramètres $p, a, b, c, \ldots$, le nombre n de ces quantités étant lui-même fonction des paramètres $p, a, b, c, \ldots$:

$$n = \varphi(p, a, b, c, \ldots).$$

Supposons en outre que, pour chaque valeur de p, le nombre n ait une limite supérieure N qui dépende uniquement de p,

$$N = f(p).$$

Si, pour un certain système de valeurs de $p, a, b, c, \ldots$, on a

$$\varphi(p, a, b, c, \ldots) = N,$$

c'est-à-dire, si le nombre n des quantités Q a la valeur maxima N compatible avec la valeur de p considérée, nous disons qu'il y a *plénitude* des quantités Q.

On trouvera dans ce petit Mémoire plusieurs propriétés nouvelles de la célèbre suite de Fibonacci.

2. Dans une suite récurrente proprement dite chaque terme est une fonction linéaire et homogène d'un certain nombre n des termes qui le précèdent immédiatement.

Une telle suite est définie, en outre de la formule ou *échelle* de récurrence, par les valeurs arbitrairement attribuées aux n premiers termes.

Ainsi la suite récurrente

$$U_0, \quad U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots, \quad U_p, \quad \ldots$$

est définie par l'échelle

$$U_p = aU_{p-1} + bU_{p-2} + \ldots + lU_{p-n},$$

et par les valeurs des n termes initiaux $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$.

Si, conservant la même échelle, on suppose tous les termes initiaux nuls, à l'exception du dernier U_{n-1} pris égal à 1, on obtient ce que j'appelle la suite *fondamentale* de la précédente, suite que je représente par

$$u_p = au_{p-1} + bu_{p-2} + \ldots + lu_{p-n},$$
$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad u_{n-2} = 0, \qquad u_{n-1} = 1.$$

Dans ma *Théorie élémentaire des séries récurrentes* (1), j'ai démontré le théorème que voici :

Le terme général d'une suite récurrente, à échelle à n termes, s'exprime en fonction linéaire et homogène de n termes consécutifs de sa suite fondamentale, les coefficients de cette forme étant des fonctions des n termes initiaux de la suite considérée.

3. Je vais rappeler la démonstration que j'ai donnée (2) de ce théorème, pour le cas d'une échelle à deux termes, auquel se rapporte la présente Note.

Étant données la suite définie par

$$U_p = aU_{p-1} + bU_{p-2}$$

et les valeurs des termes initiaux U_0 et U_1, considérons la suite

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3e série, t. III, p. 65.

(2) *Loc. cit.,* p. 71.

fondamentale définie par

$$u_p = au_{p-1} + bu_{p-2},$$
$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1,$$

et posons, pour toute valeur de p,

$$V_p = U_p - U_1 u_p.$$

En vertu des formules précédentes, on voit que

$$V_p = aV_{p-1} + bV_{p-2}.$$

D'ailleurs, on a

$$\begin{aligned} V_0 &= U_0 - U_1 u_0 = U_0, \\ V_1 &= U_1 - U_1 u_1 = 0, \\ V_2 &= aV_1 + bV_0 = bU_0. \end{aligned}$$

Écrivons alors la formule de récurrence qui lie les quantités V, en divisant ses deux membres par bU_0,

$$\frac{V_p}{bU_0} = a\frac{V_{p-1}}{bU_0} + b\frac{V_{p-2}}{bU_0}.$$

Comme nous avons

$$\frac{V_1}{bU_0} = 0 = u_0,$$
$$\frac{V_2}{bU_0} = 1 = u_1,$$

nous en déduisons

$$\frac{V_p}{bU_0} = u_{p-1};$$

par suite,

$$U_p = U_1 u_p + V_p = U_1 u_p + bU_0 u_{p-1},$$

formule qui traduit, pour le cas d'une échelle à deux termes, le théorème énoncé plus haut.

Cette formule n'est pas sans importance. En outre des applications que j'en ai données dans le Mémoire d'où elle est extraite, je l'ai appliquée depuis dans ma Note *Sur une série à loi alternée* (1).

La présente Note a pour but d'en développer une nouvelle application.

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XII, p. 78.

4. J'établirai auparavant quelques propriétés de la suite de Fibonacci, dont j'aurai besoin au cours de ce travail.

On sait que cette suite est définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1,$$
$$u_p = u_{p-1} + u_{p-2}.$$

C'est donc une suite fondamentale. Écrivons-en quelques termes

u_0.	u_1.	u_2.	u_3	u_4.	u_5.	u_6.	u_7.	u_8.	u_9.	u_{10}.	u_{11}.	u_{12}.	u_{13}.	u_{14}.
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

On peut prolonger cette suite au-dessous de u_0 au moyen d'indices négatifs, et je dis que l'on a

$$u_{-p} = (-1)^{p+1} u_p. \tag{2}$$

Supposons, en effet, la formule vraie pour les indices $p-1$ et $p-2$. Nous avons évidemment

$$\begin{aligned} u_{-p} &= -u_{-(p-1)} + u_{-(p-2)} \\ &= -(-1)^p u_{p-1} + (-1)^{p-1} u_{p-2} = (-1)^{p+1}(u_{p-1} + u_{p-2}) = (-1)^{p+1} u_p. \end{aligned}$$

Or la formule se vérifie pour $p = 0$ et $p = 1$. Elle est donc établie.

L'équation génératrice de la suite de Fibonacci est

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{3}$$

dont les racines sont

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

positive et supérieure à 1,

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

négative et inférieure à 1 en valeur absolue.

On a, en vertu d'une formule connue,

$$u_p = \frac{x_1^p - x_2^p}{x_1 - x_2}.$$

D'après cela, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=p} u_i = \frac{\sum_{i=0}^{i=p} x_1^i - \sum_{i=0}^{i=p} x_2^i}{x_1 - x_2} &= \frac{\dfrac{x_1^{p+1}-1}{x_1-1} - \dfrac{x_2^{p+1}-1}{x_2-1}}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{-(x_1^{p+1} - x_2^{p+1}) + x_1 x_2 (x_1^p - x_2^p) + x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 - 1)(x_2 - 1}. \end{aligned}$$

Or, x_1 et x_2 étant racines de l'équation (3), on a

$$x_1 x_2 = -1,$$
$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = -1\,;$$

par suite,

$$\sum_{i=0}^{i=p} u_i = \frac{x_1^{p+1} - x_2^{p+1}}{x_1 - x_2} + \frac{x_1^p - x_2^p}{x_1 - x_2} - 1 = u_{p+1} + u_p - 1$$

ou, d'après la formule de définition,

$$\sum_{i=0}^{i=p} u_i = u_{p+2} - 1. \tag{4}$$

Cherchons maintenant à effectuer la somme

$$\sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i u_i = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots + (-1)^p u_p.$$

Elle peut s'écrire, en vertu de (2),

$$-(u_0 + u_{-1} + u_{-2} + u_{-3} + \ldots + u_{-p})\,;$$

par suite,

$$\sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i u_i = -\sum_{i=0}^{i=p} u_{-i}.$$

Pour cette somme, on trouvera, comme précédemment, en représentant par x'_1 et x'_2 les racines de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{i=0}^{i=p} u_{-i} = \frac{x'_1 x'_2 (x'^p_1 - x'^p_2) - (x'^{p+1}_1 - x'^{p+1}_2) + x'_1 - x'_2}{(x'_1 - x'_2)(x'_1 - 1)(x'_2 - 1)}.$$

Ici, d'après (5), on a

$$x'_1 x'_2 = -1, \qquad (x'_1 - 1)(x'_2 - 1) = 1,$$

et, par suite,

$$\sum_{i=0}^{i=p} u_{-i} = -\frac{x'^{p+1}_1 - x'^{p+1}_2}{x'_1 - x'_2} - \frac{x'^p_1 - x'^p_2}{x'_1 - x'_2} + 1$$
$$= -u_{-(p+1)} - u_{-p} + 1 = -u_{-(p-1)} + 1.$$

Donc

$$(6) \qquad \sum_{i=0}^{i=p}(-1)^i u_i = (-1)^p u_{p-1} - 1.$$

Le rapprochement des formules (4) et (6) fait voir que, *si p est impair,* on a

$$\sum_{i=0}^{i=p} u_i = \sum_{i=0}^{i=p+3} (-1)^i u_i,$$

et, *si p est pair,*

$$\sum_{i=0}^{i=p} u_i = -\sum_{i=0}^{i=p+3} (-1)^i u_i - 2.$$

J'établirai enfin, au sujet de la suite de Fibonacci, une dernière formule dont j'aurai besoin plus loin.

On a

$$\frac{u_p}{u_{p-i}} = \frac{x_1^p - x_2^p}{x_1^{p-i} - x_2^{p-i}} = \frac{x_1^i - x_2^i \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{p-i}}{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{p-i}}.$$

Laissant i fixe, faisons croître p indéfiniment; x_2 étant, en valeur absolue, inférieur à x_1, on a $\lim\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{p-i} = 0$, et, par suite,

$$(7) \qquad \lim \frac{u_p}{u_{p-i}} = x_1^i.$$

5. Je vais maintenant aborder le problème que j'ai en vue dans cette Note, et qui est le suivant :

Entre deux quantités données, en insérer un certain nombre d'autres, telles que, dans la suite ainsi obtenue, chaque terme soit égal à la somme des deux précédents.

Soient a et b les quantités données. Supposons $b > a$. Il s'agit d'insérer, entre a et b, p quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ telles que, quel que soit i, et en posant $\alpha_0 = a$, $\alpha_{p+1} = b$, on ait

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_{i-2}.$$

D'après la formule (1), on aura

$$b = \alpha_{p+1} = \alpha_1 u_{p+1} + a u_p,$$

u_p et u_{p+1} étant les termes d'indices p et $p+1$ dans la suite de Fibonacci. De là, on tire

$$\alpha_1 = \frac{b - au_p}{u_{p+1}}.$$

La formule (1) donne encore

$$\alpha_i = \alpha_1 u_i + au_{i-1} = \frac{b - au_p}{u_{p+1}} u_i + au_{i-1} = \frac{bu_i - a(u_p u_i - u_{p+1} u_{i-1})}{u_{p+1}}.$$

Les quantités a et b étant quelconques, nous pouvons faire $a = u_1$, $b = u_{p+2}$. Nous avons alors $\alpha_{i-1} = u_i$. Donc

$$u_i = \frac{u_{p+2} u_{i-1} - u_1 (u_p u_{i-1} - u_{p+1} u_{i-2})}{u_{p+1}}$$

ou, puisque $u_1 = 1$,

$$u_{p+1} u_i - u_{p+2} u_{i-1} = -(u_p u_{i-1} - u_{p+1} u_{i-2}).$$

Faisant décroître simultanément les indices p et i, on a successivement

$$\begin{aligned} u_{p+1} u_i - u_{p+2} u_{i-1} &= -(u_p u_{i-1} - u_{p+1} u_{i-2}) \\ &= u_{p-1} u_{i-2} - u_p u_{i-3} \\ &= \dots\dots\dots\dots \\ &= (-1)^{i+1} (u_{p-i+2} u_1 - u_{p-i+3} u_0) = (-1)^{i+1} u_{p-i+2}; \end{aligned}$$

par suite,

$$u_p u_i - u_{p+1} u_{i-1} = (-1)^{i+1} u_{p-i+1}.$$

Remarquons en passant que c'est là une propriété intéressante des nombres de Fibonacci (¹), propriété dont la généralité exige la considération des termes à indices négatifs qui ont été définis plus haut. Grâce à cette formule, la valeur de α_i peut être mise sous la forme

$$\alpha_i = \frac{bu_i + a(-1)^i u_{p+1-i}}{u_{p+1}}. \tag{8}$$

Remarquons que les termes u_i et u_{p+1-i} sont équidistants des extrêmes dans la suite

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_{p-1}, \quad u_p, \quad u_{p+1},$$

ce qui permet de retenir très aisément la formule.

(¹) Pour $i = p$, cette formule donne $u_p^2 = u_{p+1} u_{p-1} + (-1)^{p+1}$.

6. Le problème est résolu; nous allons le discuter en supposant a et b positifs.

a et b étant positifs, on voit que tous les termes à indice pair sont nécessairement positifs.

Les termes d'indice impair sont positifs à partir du terme α_{2k+1}, tel que

$$\frac{u_{p+2k-2}}{u_{2k-1}} > \frac{b}{a} > \frac{u_{p+2k}}{u_{2k+1}};$$

il y a alors k termes négatifs.

En particulier, si

$$u_p < \frac{b}{a},$$

tous les termes sont positifs. Si de plus

$$\frac{bu_1 - au_p}{u_{p+1}} > a,$$

ces termes vont continuellement en croissant de a à b. Or, puisque $u_1 = 1$, cette condition peut s'écrire

$$b > a(u_p + u_{p+1})$$

ou

$$u_{p+2} < \frac{b}{a}.$$

Il ne peut y avoir de termes négatifs que dans la première moitié de la suite. En effet, si le terme α_{2k+1} est dans la seconde moitié, on a forcément

$$\frac{u_{p-2k}}{u_{2k+1}} < 1,$$

et, comme $\frac{b}{a} > 1$, *a fortiori*,

$$\frac{u_{p-2k}}{u_{2k+1}} < \frac{b}{a},$$

ce qui démontre la proposition avancée.

7. Nous allons maintenant chercher, pour une valeur donnée, le nombre maximum de termes négatifs que peut renfermer la suite considérée.

Supposons d'abord p impair, $p = 2n + 1$.

Il existe alors un terme du milieu, pour lequel $u_i = u_{p+1-i}$; la valeur de ce terme peut donc s'écrire

$$\frac{(b \pm a)u_i}{u_{p+1}},$$

qui est nécessairement > 0.

Il y a deux cas à considérer suivant que n est pair ou impair.

1° *n pair.* — Le terme du milieu est α_{n+1}. Le terme précédent α_n étant à indice pair est nécessairement positif. Le terme le plus haut qui puisse être négatif est

$$\alpha_{n-1} = \frac{bu_{n-1} - au_{n+3}}{u_{2n+2}}.$$

Pour qu'il soit négatif, il faut que

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n-1}} > \frac{b}{a}.$$

Il y a alors $\frac{n}{2}$ termes négatifs.

2° *n impair.* — Le terme le plus haut qui puisse être négatif est

$$\alpha_n = \frac{bu_n - au_{n+2}}{u_{2n+2}}.$$

Il le sera, lorsque

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} > \frac{b}{a},$$

et il y aura alors $\frac{n+1}{2}$ termes négatifs.

Supposons maintenant p pair, $p = 2n$. Il n'y a pas de terme du milieu. Deux cas à considérer :

1° *n pair.* — Le plus haut des termes qui puissent être négatifs est

$$\alpha_{n+1} = \frac{bu_{n-1} - au_{n+2}}{u_{2n+1}}.$$

Il est négatif pour

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n-1}} > \frac{b}{a},$$

et il y a alors $\frac{n}{2}$ termes négatifs.

2° *n impair.* — Le nombre des termes négatifs est maximum lorsque

$$\alpha_n = \frac{bu_n - au_{n+1}}{u_{2n+1}}$$

est négatif, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{b}{a},$$

et ce nombre maximum est $\frac{n+1}{2}$.

Si l'on compare les quatre cas qui viennent d'être envisagés, on voit que l'on peut énoncer cette proposition générale :

Si l'on insère p termes entre a et b, et que $\mathrm{I}\left(\frac{p}{2}\right)$ *représente le plus grand nombre* IMPAIR *inférieur ou égal à la partie entière du quotient de p par* 2, *la suite aura son nombre maximum de termes négatifs si*

$$\frac{u_{p-\mathrm{I}\left(\frac{p}{2}\right)+1}}{u_{\mathrm{I}\left(\frac{p}{2}\right)}} > \frac{b}{a},$$

et ce nombre sera $\dfrac{\mathrm{I}\left(\frac{p}{2}\right)+1}{2}$.

Ce nombre peut encore s'exprimer d'une autre façon. Représentons par $\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{N}}{2}\right)$ la partie entière du quotient de N par 2 et, ainsi que nous l'avons fait dans une autre Note [1], par $\mathrm{G}\left(\frac{\mathrm{N}}{2}\right)$ la différence $\mathrm{N} - \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{N}}{2}\right)$. Nous voyons alors que le nombre maximum de termes négatifs peut dans tous les cas s'exprimer par

$$\mathrm{G}\left[\frac{\mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right)}{2}\right].$$

De là, on déduit cette formule

$$\frac{\mathrm{I}\left(\frac{p}{2}\right)+1}{2} = \mathrm{G}\left[\frac{\mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right)}{2}\right].$$

---

[1] Voir *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XII, p. 87.

Faisons, par exemple, $a = 1$, $b = 4$, $p = 12$. Nous avons

$$\mathrm{I}\left(\frac{p}{2}\right) = 5,$$

$$p + 1 - \mathrm{I}\left(\frac{p}{2}\right) = 8;$$

$$\frac{u_8}{u_5} = \frac{21}{5} \quad \text{qui est} \quad > \frac{b}{a} \text{ ou } 4.$$

Donc la suite considérée aura son nombre maximum de termes négatifs et ce nombre sera

$$\frac{1 + \mathrm{I}\left(\frac{p}{2}\right)}{2} = 3.$$

Effectivement, cette suite est, par application de la formule (8),

$a.$	$\alpha_1.$	$\alpha_2.$	$\alpha_3.$	$\alpha_4.$	$\alpha_5.$	$\alpha_6.$	$\alpha_7.$	$\alpha_8.$	$\alpha_9.$	$\alpha_{10}.$	$\alpha_{11}.$	$\alpha_{12}.$	$b.$
1	$-\frac{140}{233}$	$\frac{93}{233}$	$-\frac{47}{233}$	$\frac{46}{233}$	$-\frac{1}{233}$	$\frac{45}{233}$	$\frac{44}{233}$	$\frac{89}{233}$	$\frac{133}{233}$	$\frac{222}{233}$	$\frac{355}{233}$	$\frac{577}{233}$	4

Elle a bien trois termes négatifs, et il ne saurait, pour $p = 12$, y en avoir davantage, puisque le dernier terme de la première moitié de la suite est α_6, qui est forcément positif, comme ayant un indice pair.

8. Nous poserons ici la définition qui a été généralisée au début de cette Note, définition qui est indispensable à la facilité du langage. Lorsque, pour une valeur donnée de p, la suite possède le nombre maximum de termes négatifs correspondant à cette valeur de p, nombre qui est, ainsi que nous l'avons vu, égal à $\frac{\mathrm{I}\left(\frac{p}{2}\right) + 1}{2}$, nous dirons qu'il y a *plénitude* de termes négatifs. Nous allons faire une étude spéciale de la plénitude.

A cet effet, nous distinguerons quatre cas, comme précédemment. De plus, nous conviendrons, pour abréger l'écriture, de poser

$$\frac{u_{p - \mathrm{I}\left(\frac{p}{2}\right) + 1}}{u_{\mathrm{I}\left(\frac{p}{2}\right)}} = \mathrm{R}_p.$$

Il y aura donc, pour des valeurs données de p, a et b, plénitude ou non, suivant que R_p sera supérieur ou inférieur à $\frac{b}{a}$.

Premier cas. — *p est de la forme $4n$.*

R_p est alors donné par la formule

$$R_p = \frac{u_{\frac{p}{2}+2}}{u_{\frac{p}{2}-1}}.$$

Je dis que ce rapport croît constamment avec p, c'est-à-dire que

$$R_p < R_{p+4}.$$

En effet, cette inégalité peut s'écrire

$$\frac{x_1^{2n+2} - x_2^{2n+2}}{x_1^{2n-1} - x_2^{2n-1}} < \frac{x_1^{2n+4} - x_2^{2n+4}}{x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1}}.$$

Chassant les dénominateurs (qui sont positifs), réduisant et tenant compte de ce que $x_1 x_2 = -1$, on met bien aisément cette inégalité sous la forme

$$1 < x_1^5 + x_2^5.$$

Elle se trouve ainsi vérifiée; car, en appliquant, pour l'exposant 5, à l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0$$

la formule qui fait connaître la somme des puissances semblables des racines d'une équation (1), on trouve

$$x_1^5 + x_2^5 = 11.$$

Ainsi donc, R_p croît en même temps que p. On trouve, en effet,

p.	R_p.
4	3
8	4
12	4,2
16	4,2307...
20	4,2352...
..	....

Dans $\frac{u_{\frac{p}{2}+2}}{u_{\frac{p}{2}-1}}$, l'indice supérieur surpassant l'indice inférieur de

(1) *Voir* Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 450; 5e édition.

trois unités, on a, en vertu de la formule (7),

$$\lim R_p = x_1^2 = 4,23603\ldots.$$

Donc, si $\frac{b}{a} > x_1^2$, on ne peut avoir pour aucune valeur de p, de la forme $4n$, $R_p > \frac{b}{a}$, et, par suite, pour aucune de ces valeurs, il ne peut y avoir plénitude de termes négatifs.

Si, au contraire, $\frac{b}{a} < 3$, pour toute valeur de p de la forme $4n$, on a $R_p > \frac{b}{a}$, et, par suite, pour chacune de ces valeurs, il y a plénitude de termes négatifs.

Si $\frac{b}{a}$ est compris entre 3 et x_1^2, la plénitude a lieu pour toute valeur de p supérieure à celle pour laquelle on a, pour la première fois,

$$\frac{u_{\frac{p}{2}+2}}{u_{\frac{p}{2}-1}} > \frac{b}{a}.$$

Il est curieux de remarquer l'extrême rapidité avec laquelle croît le nombre des valeurs de p pour lesquelles la plénitude a lieu.

Ainsi, pour $\frac{b}{a} < 3$, ce nombre est nul, et pour $\frac{b}{a} > 2 + \sqrt{5}$ ou $4,23603\ldots$, ce nombre est infini. D'ailleurs ce nombre croît avec une rapidité d'autant plus grande que $\frac{b}{a}$ se rapproche davantage de $2 + \sqrt{5}$.

Nous allons mettre ce fait plus en évidence. Pour cela, calculons les intervalles de valeurs de $\frac{a}{b}$, à l'intérieur desquels le nombre des plénitudes possibles reste le même, c'est-à-dire les intervalles tels que $R_{p+4} - R_p$. Puisque $p = 4n$, on a

$$R_{p+4} - R_p = \frac{x_1^{2n+4} - x_2^{2n+4}}{x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1}} - \frac{x_1^{2n+2} - x_2^{2n+2}}{x_1^{2n-1} - x_2^{2n-1}}.$$

Réduisant au même dénominateur, effaçant les termes qui se détruisent et tenant compte de ce que $x_1 x_2 = -1$, on met cette différence sous la forme

$$R_{p+4} - R_p = \frac{x_1^5 + x_2^5 - 1}{x_1^{4n} + x_2^{4n} + x_1^2 + x_2^2} = \frac{S_5 - 1}{S_p + S_2},$$

S_p désignant la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

On a, par application d'une formule connue [1],

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & S_p = 1 + p + \frac{p(p-3)}{1.2} + \ldots \\ & \quad + \frac{p(p-\mu-1)(p-\mu-2)\ldots(p-2\mu+1)}{1.2\ldots\mu} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

en prolongeant ce développement jusqu'à ce qu'il s'arrête de lui-même; par conséquent,

$$S_2 = 3,$$
$$S_5 = 11;$$

donc,

$$R_{p+4} - R_p = \frac{10}{4 + p + \frac{p(p-3)}{1.2} + \ldots + \frac{p(p-\mu-1)(p-\mu-2)\ldots(p-2\mu+1)}{1.2\ldots\mu} + \ldots};$$

et l'on voit que cet intervalle décroît rapidement lorsque p augmente.

Deuxième cas. — *p est de la forme $4n+1$.*

R_p est donné par

$$R_p = \frac{u_{p-E\left(\frac{p}{2}\right)+2}}{u_{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}} = \frac{u_{2n+3}}{u_{2n-1}}.$$

Ici encore, on a

$$R_p < R_{p+4},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x_1^{2n+3} - x_2^{2n+3}}{x_1^{2n-1} - x_2^{2n-1}} < \frac{x_1^{2n+5} - x_2^{2n+5}}{x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1}},$$

que l'on ramène à

$$x_1^2 + x_2^2 < x_1^6 + x_2^6,$$

inégalité vérifiée, puisque

$$x_1^2 + x_2^2 = 3$$

et

$$x_1^6 + x_2^6 = 18.$$

---

[1] *Loc. cit.*

D'ailleurs, on trouve

p.	R_p.
5	5
9	6,5
13	6,8
17	6,8461...
..	....

Dans $\frac{u_{2n+3}}{u_{2n-1}}$ l'indice supérieur surpasse l'indice inférieur de quatre unités; on a donc, en vertu de la formule (7),

$$\lim R_p = x_1^4 = 6,85403\ldots.$$

On déduit de ce qui précède que, si $\frac{b}{a} > x_1^4$, on ne peut avoir plénitude de termes négatifs pour aucune valeur de p de la forme $4n+1$.

Si $\frac{b}{a} < 5$, il y a plénitude pour toute valeur de p de la forme $4n+1$. Inutile d'ajouter que pour la valeur $p=1$ qui rentre dans cette forme, il ne peut y avoir de terme négatif, car la suite est alors

$$a, \quad b-a, \quad b.$$

On peut répéter ici les remarques faites sur le cas précédent; on trouve, par un calcul analogue,

$$R_{p+4} - R_p = \frac{S_6 - S_2}{S_{p-1} + S_2}$$

ou

$$R_{p+4} - R_p = \frac{15}{4+(p-1)+\frac{(p-1)(p-4)}{1.2}+\ldots+\frac{(p-1)(p-\mu-2)(p-\mu-3)\ldots(p-2\mu)}{1.2\ldots\mu}+\ldots}.$$

TROISIÈME CAS. — *p est de la forme $4n+2$.*

Ici, l'on a

$$R_p = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}.$$

Le rapport R_p va encore en croissant, attendu que

$$\frac{x_1^{2n+2} - x_2^{2n+2}}{x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1}} < \frac{x_1^{2n+4} - x_2^{2n+4}}{x_1^{2n+3} - x_2^{2n+3}}$$

ou

$$-(x_1 + x_2) < x_1^3 + x_2^3,$$

car

$$x_1 + x_2 = 1,$$
$$x_1^3 + x_2^3 = 4.$$

On a, en effet,

p	R_p
6	1,5
10	1,6
14	1,61538...
18	1,6176
..	......

La limite de R_p est, d'après la formule (7),

$$\lim R_p = x_1 = 1,61803....$$

Donc, si $\frac{b}{a} > x_1$, il n'y a plénitude de termes négatifs pour aucune valeur de p de la forme $4n+2$.

Si $\frac{b}{a} < 1,5$, la plénitude existe pour toute valeur de p de cette forme.

Pour la valeur $p = 2$, qui rentre dans ce cas, il ne peut y avoir de terme négatif; car la suite est alors

$$a, \quad \frac{b-a}{2}, \quad \frac{b+a}{2}, \quad b.$$

Les limites 1,5 et $x_1 = 1,61803...$, entre lesquelles varie $\frac{b}{a}$, pour que le nombre des valeurs de p donnant plénitude passe de l'infini à zéro, sont, on le voit, extrêmement rapprochées.

Elles diffèrent d'un peu plus de 0,1. On trouve d'ailleurs

$$R_{p+4} - R_p = \frac{S_3 + S_1}{S_{p+2} + S_2}$$

ou, d'après la formule (9),

$$R_{p+4} - R_p = \frac{5}{4 + (p+2) + \frac{(p+2)(p-1)}{1.2} + \ldots + \frac{(p+2)(p-\mu+1)\ldots(p-2\mu+3)}{1.2\ldots\mu} + \ldots}$$

Quatrième cas. — *p est de la forme $4n+3$.*

Le rapport R_p est donné par

$$R_p = \frac{u_{2n+3}}{u_{2n+1}}.$$

Il va en croissant, en vertu de l'inégalité

$$\frac{x_1^{2n+3} - x_3^{2n+3}}{x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1}} < \frac{x_1^{2n+5} - x_2^{2n+5}}{x_1^{2n+3} - x_2^{2n+3}},$$

ou

$$2 < x_1^4 + x_2^4,$$

qui est vérifiée, puisque, d'après la formule (9), on a

$$x_1^4 + x_2^4 = 7.$$

En effet, on trouve

p.	R_p.
3	2
7	2,5
11	2,6
15	2,6153...
19	2,6176...
..	....

et, à la limite, en vertu de la formule (7),

$$\lim R_p = x_1^2 = 2,61802....$$

En conséquence, si $\frac{b}{a} > x_1^2$, il n'y a plénitude de termes négatifs pour aucune valeur de p de la forme $4n + 3$.

Si $\frac{b}{a} < 2$, il y a plénitude pour toute valeur de p de cette forme.

Enfin, dans ce cas, on trouve

$$R_{p+4} - R_p = \frac{S_4 - 2}{S_{p+1} + S_2}$$

ou, d'après la formule (9),

$$R_{p+4} - R_p = \frac{5}{4 + (p+1) + \frac{(p+1)(p-2)}{1.2} + \ldots + \frac{(p+1)(p-\mu)\ldots(p-2\mu+2)}{1.2\ldots\mu} + \ldots}.$$

De l'examen des quatre cas qui précèdent résultent les remarques générales suivantes :

I. *Si* $\frac{b}{a} < 1,5$, *il y a plénitude de termes négatifs pour toute valeur de* p.

II. *Si* $\frac{b}{a} > x_1^4 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = 6{,}85403\ldots$, *cette plénitude n'a lieu pour aucune valeur de p.*

Entre ces limites extrêmes :

III. *Si* $\frac{b}{a} > x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$, *la plénitude n'a lieu pour aucune valeur de p de la forme* $4n+2$.

IV. *Si* $\frac{b}{a} > x_1^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}61802\ldots$, *la plénitude n'a lieu pour aucune valeur de p des formes* $4n+2$ *et* $4n+3$.

V. *Si* $\frac{b}{a} > x_1^3 = 2+\sqrt{5} = 4{,}23603\ldots$, *la plénitude n'a lieu pour aucune valeur de p des formes* $4n+2$, $4n+3$ *et* $4n$.

Et aussi :

VI. *Si* $\frac{b}{a} < 2$, *il y a plénitude pour toutes les valeurs de p des formes* $4n+3$, $4n$ *et* $4n+1$.

VII. *Si* $\frac{b}{a} < 3$, *il y a plénitude pour toutes les valeurs de p des formes* $4n$ *et* $4n+1$.

VIII. *Si* $\frac{b}{a} < 5$, *il y a plénitude pour toutes les valeurs de p de la forme* $4n+1$.

Exemple. — Prenons $a=1$, $b=4$, c'est-à-dire $\frac{b}{a}=4$.

D'après la Remarque IV, la plénitude de termes négatifs ne peut avoir lieu pour aucune valeur de p de l'une des formes $4n+2$ et $4n+3$. D'après la Remarque VIII, elle aura lieu pour toute valeur de p de la forme $4n+1$.

Quant aux valeurs de p de la forme $4n$, la plénitude aura lieu pour toutes celles de ces valeurs qui sont supérieures à la première d'entre elles pour laquelle on a

$$\frac{u_{\frac{p}{2}+2}}{u_{\frac{p}{2}-1}} > 4,$$

c'est-à-dire à partir de $p = 12$. Pour $p = 8$, on a $R_p = 4$; il y a un terme nul; mais nous ne comptons pas les termes nuls comme négatifs.

On peut donc dire :

Si $a = 1$, $b = 4$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait plénitude de termes négatifs est que p soit ou de la forme $4n$, n étant supérieur ou égal à 3, ou de la forme $4n+1$.

9. Nous allons maintenant opérer la sommation de la suite obtenue en intercalant, comme il a été dit, p termes entre les nombres a et b; nous représenterons cette somme par S_p. En posant, comme précédemment, $a = \alpha_0$, $b = \alpha_{p+1}$, nous pourrons écrire

$$S_p = \sum_{i=0}^{i=p+1} \alpha_i.$$

La formule (8) donne alors immédiatement

$$S_p = \frac{b \sum_{i=0}^{i=p+1} u_i + (-1)^{p+1} a \sum_{i=0}^{i=p+1} (-1)^i u_i}{u_{p+1}}$$

ou, en vertu des formules (4) et (6),

$$(10) \qquad S_p = \frac{b(u_{p+3} - 1) + a[u_p + (-1)^p]}{u_{p+1}}.$$

Comme l'on a

$$\begin{aligned} u_{p+3} &= u_{p+2} + u_{p+1}, \\ u_p &= u_{p+2} - u_{p+1}, \end{aligned}$$

on voit que cette formule peut encore s'écrire

$$(10') \qquad S_p = \frac{(b+a)u_{p+2} + (b-a)u_{p+1} - [b - (-1)^p a]}{u_{p+1}}$$

10. Il nous reste un dernier point à examiner : *Que devient la suite considérée lorsque l'on fait croître indéfiniment le nombre p des termes insérés entre a et b?*

Pour nous en rendre compte, nous allons *replier* la suite. Voici en quoi consiste cette opération. Si, numérotant la suite à rebours, nous écrivons

$$\beta_{p+1} = \alpha_0 = a, \quad \beta_p = \alpha_1, \quad \beta_{p-1} = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \beta_1 = \alpha_p, \quad \beta_0 = \alpha_{p+1} = b,$$

nous pourrons écrire la suite, en plaçant l'un au-dessous de l'autre les termes équidistants des extrêmes

$$\begin{array}{llllll} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_i, & \ldots, \\ \beta_0, & \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_i, & \ldots, \end{array}$$

ces deux lignes étant prolongées jusqu'au milieu de la suite. S'il existe un terme du milieu, nous l'inscrirons indifféremment dans l'une ou l'autre des deux lignes.

Nous avons, en vertu de la formule (8),

$$\alpha_i = \frac{bu_i + a(-1)^i u_{p+1-i}}{u_{p+1}},$$

$$\beta_i = \frac{bu_{p+1-i} + a(-1)^{p+1-i} u_i}{u_{p+1}}.$$

Faisons croître indéfiniment le nombre p. Le nombre des termes dans chacune des deux suites (α) et (β), dont la réunion constitue la suite considérée, croît indéfiniment. De plus, on a évidemment, i étant une quantité fixe,

$$\lim \frac{u_i}{u_{p+1}} = 0$$

et, en vertu de la formule (7),

$$\lim \frac{u_{p+1-i}}{u_{p+1}} = \frac{1}{x_1^i};$$

donc

$$\lim \alpha_i = \frac{(-1)^i a}{x_1^i},$$

$$\lim \beta_i = \frac{b}{x_1^i};$$

et, à la limite, la suite repliée est formée par la juxtaposition des deux suites

$$\begin{array}{llllll} a & -\dfrac{a}{x_1} & \dfrac{a}{x_1^2} & \ldots & \dfrac{(-1)^i a}{x_1^i} & \ldots, \\ b & \dfrac{b}{x_1} & \dfrac{b}{x_1^2} & \ldots & \dfrac{b}{x_1^i} & \ldots. \end{array}$$

Ainsi donc la limite de la suite se compose de termes alternativement positifs et négatifs, décroissant de a jusqu'à zéro et ne dépendant que de a et de termes positifs croissant de zéro jusqu'à b, et ne dépendant que de b.

Si nous représentons par S la limite de la somme S_p, nous aurons

$$S = a\left(1 - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} - \dots\right) + b\left(1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} + \dots\right) = a\frac{1}{1 + \frac{1}{x_1}} + b\frac{1}{1 - \frac{1}{x_1}}.$$

Or

$$1 + \frac{1}{x_1} = 1 - x_2 = x_1;$$

par suite,

$$S = \frac{a}{x_1} + \frac{bx_1}{x_1 - 1} = \frac{a(x_1 - 1) + bx_1^2}{x_1^2 - x_1}.$$

Mais, x_1 étant racine de $x^2 - x - 1 = 0$, on a

$$x_1^2 = x_1 + 1,$$
$$x_1^2 - x_1 = 1;$$

donc enfin

$$S = a(x_1 - 1) + b(x_1 + 1).$$

C'est d'ailleurs ce que donne directement la formule (10'). En effet, remarquant que, d'après la formule (7),

$$\lim \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} = x_1,$$

on a

$$S = (b + a)x_1 + (b - a);$$

c'est la formule précédente.

Pour terminer, nous ferons la remarque suivante :

Étant connue la suite de Fibonacci, on peut très aisément calculer une puissance quelconque x_1^p de x_1, en fonction de x_1.

En effet, posons $U_0 = 1$, $U_1 = x_1$ et, d'une manière générale, $U_p = x_1^p$. Comme nous avons

$$x_1^2 = x_1 + 1,$$

nous en déduisons, en multipliant les deux membres par x_1^{p-2},

$$U_p = U_{p-1} + U_{p-2}.$$

Donc, par application de la formule (1),

$$U_p = x_1 u_p + u_{p-1},$$

c'est-à-dire

$$x_1^p = x_1 u_p + u_{p-1}.$$

De là, nous déduirons une remarquable conséquence relativement à la suite de Fibonacci. En effet, l'égalité précédente se démontre pour x_2 comme pour x_1 ; donc

$$x_2^p = x_2 u_p + u_{p-1}.$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, en tenant compte de ce que $x_1 x_2 = -1$, $x_1 + x_2 = 1$; il vient

$$(-1)^p = -u_p^2 + u_{p-1}^2 + u_p u_{p-1}$$

ou

$$u_p u_{p-1} = u_p^2 - u_{p-1}^2 + (-1)^p,$$

c'est-à-dire que *le produit de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci est égal à la différence des carrés de ces deux termes augmentée ou diminuée de l'unité suivant que l'indice du plus élevé de ces termes est pair ou impair.*