BULLETIN DE LA S. M. F.

H. PICQUET

Note sur le conoïde de Plücker

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 68-76

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__68_0>

Note sur le conoïde de Plücker; par M. H. Picquet.

(Séance du 4 novembre 1885.)

1. Si l'on étudie les conditions de possibilité d'une surface réglée du troisième degré, il est aisé de voir qu'une pareille surface contient, en outre de ses génératrices rectilignes, deux directrices de même espèce, dont l'une est double ([1]).

Tout plan passant par la directrice double coupe en outre la surface suivant une génératrice; et tout plan passant par la directrice simple la coupe encore suivant deux génératrices qui se rencontrent sur la droite double.

Tout plan passant par une génératrice coupe en outre la surface suivant une conique, qui rencontre la génératrice en deux points, dont l'un est sur la droite double, tandis que l'autre est le point où le plan est tangent.

A chaque génératrice de la surface correspond ainsi un système de coniques. Deux coniques d'un même système se coupent en un point de la droite double; deux coniques de systèmes différents se coupent en un point.

Par un point de la surface qui n'est pas sur la droite double, il passe une génératrice et une infinité de coniques situées dans les plans passant par ce point et les diverses génératrices.

Une conique quelconque de la surface rencontre toutes les génératrices, différentes de la génératrice G qui définit son système, en un point; elle rencontre la droite double en celui de ses deux points communs avec G, où son plan n'est pas tangent; elle ne rencontre pas la directrice simple.

Il suit de là que les cônes, ayant pour sommet un même point a de la droite double et pour bases les diverses coniques de la surface, ont deux génératrices communes : ce sont les deux généra-

---

([1]) Relativement aux surfaces réglées algébriques de degré quelconque, *voir* le Chapitre de la *Géométrie analytique à trois dimensions,* de Salmon, intitulé *Ruled surfaces.* En ce qui concerne les surfaces réglées du troisième degré, *voir,* dans le même Ouvrage, le commencement du Chapitre consacré aux surfaces du troisième degré.

trices de la surface issues de a, puisque ces droites rencontrent toutes les coniques de la surface.

Ces deux droites rencontrent la directrice simple ; de sorte qu'on peut dire encore que *tout plan passant par la directrice simple coupe ces cônes suivant des coniques ayant cette droite pour corde commune.*

Réciproquement, on voit immédiatement que la surface réglée, dont deux directrices A et B sont rectilignes, et dont la troisième directrice C est une conique rencontrant la droite A en un point, est du troisième degré, et jouit, par conséquent, de toutes les propriétés précédentes, relativement à la droite A, considérée comme directrice double et à la droite B, prise pour directrice simple.

2. Si l'on suppose que la droite B soit à l'infini et définisse, par conséquent, une direction de plans que nous supposerons horizontaux, si l'on suppose en outre la directrice A verticale, et si l'on prend pour conique C une conique dont la projection horizontale soit un cercle, on a le *conoïde de Plücker* (¹).

On voit alors que *les traces horizontales de tous les cônes, ayant pour sommet un même point de la droite* A *et pour bases respectives les diverses coniques de la surface, sont des coniques homothétiques.*

(¹) Cette surface joue, comme on sait, un rôle fort important dans la théorie du déplacement d'une figure invariable dans l'espace. Elle a été étudiée, pour la première fois, par Plücker (*Neue Geometrie des Raumes,* p. 97), qui a prouvé qu'elle est le lieu des axes des complexes linéaires, dont fait partie une congruence linéaire. C'est là le lien qui la rattache au déplacement d'une figure invariable, puisque l'étude de ce dernier se ramène à celle du complexe *linéaire* des normales aux trajectoires des points entraînés. Au lieu d'un déplacement défini, si l'on suppose un déplacement assujetti à quatre conditions (dans lequel les points décrivent des surfaces trajectoires), il donne lieu à une infinité de déplacements définis, et l'on a alors une congruence formée par les normales aux surfaces trajectoires des points entraînés. Le lieu des axes de tous ces déplacements ou, ce qui revient au même, le lieu des droites, qui, à partir de leurs positions primitives, n'engendrent pas de pinceaux, mais des éléments de surfaces réglées qui se raccordent, doit donc être un conoïde de Plücker. C'est ce qu'a démontré M. Mannheim, par d'élégantes considérations se rattachant directement au déplacement (*Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique,* p. 440). *Voir* également, du même Auteur, des Communications à l'Académie des Sciences (6 novembre 1871 et 2 février 1885). Enfin cette surface a aussi été étudiée par MM. Lindemann (*Math. Ann.,* t. VII, p. 56), Cayley et R.-S. Ball; par ces derniers, sous le nom de *cylindroïde.*

En particulier, *les projections horizontales de toutes les coniques de la surface sont des cercles.*

Suivant le procédé usuel, on voit que la surface est du troisième degré; car le paraboloïde défini par la droite D, dont on cherche les points d'intersection avec le conoïde, par la directrice verticale A, et ayant pour plan directeur le plan horizontal, rencontre la conique C en trois points en dehors de A; les génératrices horizontales de ce paraboloïde, passant par ces trois points, rencontrent D en ses points d'intersection avec le conoïde.

3. Parmi toutes les directions de plans parallèles à la directrice A, choisissons celle du plan vertical de projection parallèle au petit axe de l'ellipse C, c'est-à-dire aux horizontales du plan de cette conique. Elle se projette alors horizontalement, suivant un cercle O passant par le pied c de la directrice A et dont le diamètre de front ab est la projection horizontale du petit axe. Soit $a'b'$ sa projection verticale; le plan de la courbe est alors défini par cette droite $(ab, a'b')$ et par l'angle α qu'il fait avec le plan vertical.

On aura aisément en $c'd'$ la projection verticale de la génératrice de la surface dont la projection horizontale est cd. Il suffira de mener par le point d, où la projection horizontale donnée coupe le cercle O, la droite de front di, de prendre $gh = gi$, et de relever le point h en h' sur le rabattement autour de A de la droite d'intersection du plan profil A avec le plan de la conique.

Soit (m, m') un point de cette génératrice; cherchons le plan tangent en ce point. Il y a plusieurs méthodes :

1° Au moyen de la tangente en (m, m') à la conique, suivant laquelle le plan tangent cherché achève de couper la surface. On verra tout à l'heure le moyen de construire cette tangente sans tracer le cercle, projection horizontale de cette conique.

2° Au moyen d'un paraboloïde de raccordement ayant pour plans directeurs le plan horizontal et le plan vertical, déterminé par la génératrice $(cd, c'd')$, s'appuyant sur A et sur la droite de front du plan tangent en (d, d'). La tangente $(dt, d't')$ de l'ellipse en ce point y détermine le plan tangent, et la direction $t'j'$ des droites de front de ce plan s'obtient en coupant par un plan de front, tel que tj. Menant par le point d' une parallèle à cette direction, on obtient en e' le point de concours des projections verticales des génératrices de front du paraboloïde, et la droite $(me, m'e')$ achève de déterminer le plan tangent en (m, m').

3° Au point c' de A, il y a deux plans tangents, qui sont les deux plans verticaux cd, ck, projetant horizontalement les deux génératrices de la surface issues de c'. Conséquemment, tout plan passant par ce point coupe le conoïde suivant une courbe ayant un point double en c', dont les deux tangentes sont les traces du plan sur ces deux plans verticaux. En particulier, le plan tangent en (m, m'), qui renferme la génératrice $(cm, c'm')$, coupe, en outre, le conoïde suivant une conique passant au point (cc'), et tangente en ce point au plan vertical ck. D'où il suit que :

Tout plan passant par une génératrice du conoïde le coupe en outre suivant une conique dont la projection horizontale est un cercle tangent en c à une droite fixe.

La conique relative au plan tangent en (m, m') aura donc pour projection horizontale un cercle O_1 passant par le point m, par le point c, et tangent en c à ck. Son centre est, par suite, sur la perpendiculaire à ck, qui est la droite joignant le point c au point l diamétralement opposé à k dans le cercle O, ou encore symétrique de d par rapport au diamètre de front ab. Un point quelconque de cette conique, dans l'espace, achèvera de déterminer le plan tangent. Cherchons, par exemple, le point sur la génératrice de contour apparent, dont la projection horizontale cn s'obtient en joignant le point c au point n du cercle O, pour lequel la tangente est de front; la solution est immédiate, et il n'est pas besoin, pour trouver ce point, de construire le cercle O_1. Il suffit d'élever au milieu de cm une perpendiculaire sur cm, qui détermine sur cn le point f cherché; ce point, relevé en f' sur la génératrice de contour apparent, achève de déterminer le plan tangent. Pour le prouver, remarquons que l'angle inscrit $\widehat{lcn}$, qui a pour mesure la moitié de l'arc ln, est égal à l'angle cfO_1. En effet, cet angle, étant complémentaire de l'angle $\widehat{mcn}$, a pour mesure une demi-circonférence, diminuée de l'arc nd ou de son égal nk, c'est-à-dire l'arc ln : il suit de là que, dans le triangle O_1cf, on a $O_1c = O_1f$, et que, par suite, le point f, déterminé comme précédemment, est sur le cercle O_1. Le théorème énoncé plus haut prouve, en outre, que la tangente en m au cercle O_1 fait, avec la génératrice mc, un angle égal à l'angle $\widehat{mck}$, et donne le plan tangent, par le premier procédé, sans construire ce cercle. Au fond, les deux méthodes diffèrent peu, puisque la perpendiculaire sur le milieu de cm détermine, par son point d'intersection avec ck, un point de la tangente en m; mais on va voir que la dernière est importante par ses conséquences et ses applications.

On peut remarquer que $fm = fc$; il en résulte que le lieu des points de contact des plans tangents, menés par un point f de la génératrice singulière, se projette suivant un cercle qui passe en c; et que, par conséquent, le lieu de l'espace est une conique de la surface. Tous les cercles analogues sont tangents en c à la projection horizontale cq de la seconde génératrice de contour apparent et sont alors les projections horizontales de coniques de la surface, situées dans des plans passant par cette génératrice. Ainsi on a cette propriété :

Le lieu des points de contact des plans tangents, menés au conoïde de Plücker par un point d'une des deux génératrices de contour apparent, est une conique de la surface, située dans un plan passant par l'autre.

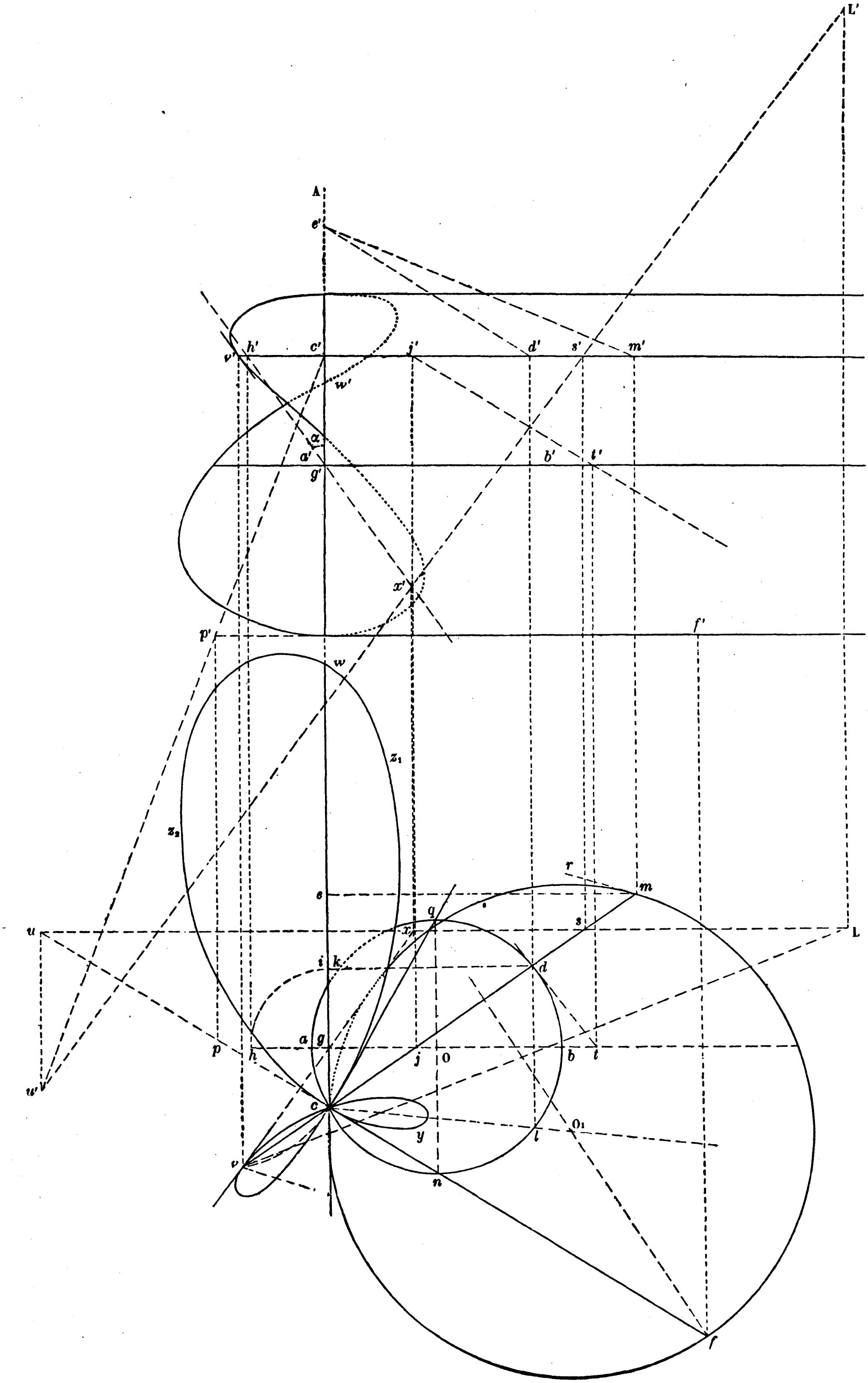
Il était clair, *a priori,* que ce lieu devait être une conique; pour un point quelconque de l'espace, c'est en effet l'intersection du conoïde avec la surface polaire de ce point, laquelle, étant du deuxième degré, le coupe suivant une courbe qui se réduit au quatrième degré, parce que la surface polaire renferme la directrice double A. Pour un point d'une génératrice de contour apparent, la quartique renferme deux fois cette génératrice et, par suite, se réduit à une conique. Le théorème précédent prouve que le plan de cette conique passe par l'autre génératrice de contour apparent et donne le moyen de la construire.

Remarque. — Les droites telles que (mr, $m'r'$), pour les différents points de la génératrice (cd, $c'd'$), sont, en chaque point de cette droite, la seconde asymptote de l'indicatrice, puisqu'elles sont tangentes, pour chaque point, à la courbe d'intersection de la surface par son plan tangent. Elles engendrent donc le paraboloïde osculateur le long de la génératrice, dont le second plan directeur est dès lors un plan vertical, parallèle à mr. On peut donc dire que :

Le second plan directeur du paraboloïde osculateur le long d'une génératrice G *au conoïde de Plücker est un plan perpendiculaire au plan directeur du conoïde et symétrique par rapport à* G *du plan projetant horizontalement la génératrice située dans le même plan horizontal que* G.

4. Le dernier procédé qui vient d'être indiqué pour construire le plan tangent fournit une méthode simple pour la recherche de la ligne d'ombre. On a vu, en effet, que $fm = fc$; si donc (p, p') est le point d'intersection avec la génératrice de contour apparent, qui se projette suivant cn du plan passant par le point lumineux (L, L') et la génératrice $(cd, c'd')$, on aura la projection horizontale du point où ce plan est tangent en décrivant du point p comme centre avec pc comme rayon un cercle qui coupera cd en un second point v, qui est le point cherché. Pour trouver (p, p'), on mènera par (L, L') une droite qui rencontre $(cd, c'd')$, par exemple la droite de front $(Ls, L's')$, et ces deux droites détermineront le plan dont on cherche le point de contact. Le plan vertical cn coupera la première au point (u, u'), la seconde au point (c, c'), de sorte que la droite $c'u'$ coupe la projection verticale de la génératrice de contour apparent en un point p', qui est le point demandé et qui se projette horizontalement en p. On obtient ainsi un point quelconque (v, v') de la ligne d'ombre; la tangente en ce point se trouve aisément : en projection horizontale, c'est la conjuguée harmonique de la droite vL par rapport aux projections des asymptotes de l'indicatrice en (v, v'), qui sont la génératrice vc et la parallèle à mr, menée par v; comme elle est située dans le plan tangent en v, on en conclut sa projection verticale au moyen du point (x, x'), où elle rencontre $(Lu, L'u')$.

On a vu plus haut que la courbe d'ombre est une quartique : la construction d'un point quelconque de la courbe prouve qu'elle rencontre la directrice A en trois points, deux sur les génératrices de contour apparent, le troisième sur la génératrice dont la projection horizontale est cL; c'est donc la quartique unicursale, à trois points doubles apparents, car l'autre quartique gauche n'a pas



A
e'
L'
v'
h'
c'
j'
d'
s'
m'
w'
α
a'
g'
b'
t'
x'
p'
f'
w
z_1
z_2
r
m
e
q
s
L
u
i
k
d
a
g
p
h
j
O
b
t
c
y
l
O_1
v
n
f

de sécante triple. La projection horizontale est alors une quartique dont c est un point triple, pour lequel les trois tangentes sont cn, cq et cL. Si l'on suppose les génératrices du conoïde indéfinies vers la droite de l'épure et limitées à la courbe d'ombre, tout le plan horizontal, à droite de la génératrice de bout ce, est recouvert par la surface, sauf les parties cyc, cz_1w à l'intérieur de la courbe d'ombre; tout le plan horizontal à gauche est vu, sauf les parties cve, cz_2w, à l'intérieur de la ligne d'ombre.

Le plan central, pour une génératrice quelconque, est le plan qui la projette horizontalement; il touche la surface sur la directrice A. Le plan tangent à l'infini est donc le plan horizontal de cette génératrice. Les points à l'infini de la ligne d'ombre sont alors les deux points à l'infini sur les génératrices situées dans le plan horizontal du point lumineux, points imaginaires dans l'épure, et les points où elle rencontre les deux génératrices à l'infini de la surface, génératrices imaginaires puisque la conique directrice est une ellipse. Celle-ci se projetant suivant un cercle, on en conclut aisément que la projection horizontale de la ligne d'ombre passe par les points cycliques; c'est alors une quartique circulaire à point triple. Ses deux autres points à l'infini sont réels ou imaginaires, suivant la position du point lumineux; ils sont sur les projections horizontales des génératrices situées dans le plan horizontal de ce point. Comme toutes les courbes tracées sur la surface, la ligne d'ombre est vue tout entière en projection horizontale; les parties pointillées des deux cercles O et O_1 ne sont pas des parties cachées, mais des parties qui n'existent pas, si on limite, comme il a été dit plus haut, la surface à la ligne d'ombre.

La projection verticale de la ligne d'ombre est une quartique unicursale tangente aux deux génératrices de contour apparent en leur point d'intersection avec la directrice A; ses deux autres points sur cette droite sont l'un sur la génératrice projetée horizontalement en Lc, où la ligne d'ombre rencontre effectivement la directrice, l'autre en w', projection verticale du point où la ligne d'ombre rencontre la génératrice de bout cw.

C'est une quartique unicursale dont le tracé révèle un point double réel; on doit alors s'attendre à en trouver deux autres imaginaires. Cherchons pour cela ses points à l'infini : d'eux d'entre eux sont les projections verticales des points de la courbe d'ombre sur les génératrices à l'infini du conoïde; le plan vertical de projection étant quelconque parmi tous les plans verticaux (car il y a toujours sur la surface des coniques dont les plans ont leurs horizontales parallèles à un plan vertical donné), il n'y a pas de raison pour que la direction limite de la droite, qui joint les deux points à distance finie de la courbe d'ombre dans un plan horizontal, lorsque ce plan s'éloigne indéfiniment, soit perpendiculaire au plan vertical de projection; dès lors, ces deux points sont des points simples de la courbe d'ombre. Il n'en est pas de même des points à l'infini sur les génératrices situées dans le plan horizontal du point lumineux. Si l'on déplace ce point de façon qu'elles soient réelles, on voit facilement que, suivant que l'on coupe la surface par un plan horizontal un peu supérieur ou un peu inférieur au plan horizontal du point lumineux, on obtient sur la courbe d'ombre un point très éloigné, mais dans des sens différents, sur chacune des deux génératrices d'intersection. La ligne d'ombre a donc, à l'infini, un point double particulier, qui est le *Selbstberührungspunkt* des Allemands, et que l'on peut appeler point d'*autocontact*. Il ne peut pas y en avoir un troisième; car une conique qui passerait par les deux premiers, qui serait tangente au point d'autocontact à la tangente d'autocontact et qui passerait en outre par un point arbitraire de la courbe, la couperait en neuf points; par suite, la courbe se décomposerait. On a là un curieux exemple de quartique unicursale n'ayant que deux points doubles; il est aisé de vérifier qu'elle est unicursale; car, si, par un point simple de la courbe et par le point double ordinaire, on fait passer une conique qui lui soit tangente au point d'autocontact, on connaît tous les points d'intersection, sauf un, lequel s'exprimera rationnellement en fonction du paramètre restant dans l'équation de la conique.

Nota. — Dans cette étude, il n'a pas été question des arcs utiles ou virtuels de la ligne d'ombre. On sait que les extrémités de ces arcs s'obtiendraient en menant du point L des tangentes à la projection horizontale de la courbe; en ces points, elle se raccorde avec la courbe d'ombre portée, lieu du troisième point d'intersection du rayon lumineux avec la surface, et dont les arcs utiles doivent être substitués aux arcs virtuels de la ligne d'ombre.