BULLETIN DE LA S. M. F.

H. POINCARÉ

Sur les déterminants d'ordre infini

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 77-90
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__77_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur les déterminants d'ordre infini; par M. H. Poincaré.

(Séance du 17 février 1886.)

J'ai eu l'occasion, à propos d'une élégante méthode de calcul employée par M. Appell, de m'occuper de la théorie d'un système d'équations linéaires, lorsque le nombre des équations et celui des inconnues sont infinis (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XIII, p. 19).

La lecture d'un Mémoire fort important de M. Hill sur le mouvement du périgée de la Lune a attiré de nouveau mon attention sur cette question (*On the part of the motion of the lunar perigee which is a fonction of the mean motions of the Sun and Moon;* Cambridge, Wilson, 1877.)

Le problème que j'avais d'abord étudié est le suivant :

Considérons une suite indéfinie de quantités données

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots \qquad (\lim a_n = \infty, \; n = \infty)$$

et une suite indéfinie de quantités inconnues

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad \ldots,$$

Il s'agit de déterminer ces quantités A, de telle sorte que les séries

$$\Sigma A_n a_n^p \qquad (p = 1, 2, \ldots, ad \text{ inf.})$$

soient absolument convergentes et aient pour somme zéro.

J'ai dit dans la Note citée que la résolution des équations linéaires

$$\Sigma A_n a_n^p = 0 \tag{1}$$

était plutôt une question d'inégalité qu'une question d'égalité. Ce passage a dû paraître obscur à plus d'un lecteur. Je suis maintenant en mesure de préciser davantage ma pensée.

Soient

$$A_1 = B_1, \qquad A_2 = B_2, \qquad \ldots, \qquad A_n = B_n, \qquad \ldots$$

une solution particulière des équations (1). Écrivons la solution générale de ces équations sous la forme

$$A_1 = h_1 B_1, \qquad A_2 = h_2 B_2, \qquad \ldots, \qquad A_n = h_n B_n, \qquad \ldots,$$

on trouvera, sinon les valeurs les plus générales des quantités h, au moins des valeurs assez générales, de la façon suivante :

Soient

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_p, \quad \ldots$$

une suite indéfinie de quantités.

Posons

$$\Sigma \,|\, B_n a_n^p \,| = S_p$$

et supposons que les quantités λ aient été choisies de telle sorte que la série

$$\Sigma \lambda_p S_p$$

soit absolument convergente. Alors, quel que soit l'entier positif q, la série à double entrée

$$\Sigma \lambda_p B_n a_n^{p+q} \qquad (n,\ p = 1,\ 2,\ \ldots,\ \text{ad inf.})$$

converge aussi absolument; or elle s'écrit

$$\Sigma \lambda_p (\Sigma B_n a_n^{p+q});$$

elle a donc pour somme o, puisque l'on a par hypothèse

$$\Sigma B_n a_n^{p+q} = 0.$$

Si donc on pose

$$h_n = \Sigma \lambda_p a_n^p \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty),$$

on aura

$$\Sigma (h_n B_n) a_n^q = 0$$

pour toutes les valeurs entières et positives de q.

Donc, si l'on fait

$$A_1 = h_1 B_1, \qquad A_2 = h_2 B_2, \qquad \ldots, \qquad A_n = h_n B_n, \qquad \ldots,$$

on aura une solution particulière des équations (1).

La série $\Sigma \lambda_p a_n^p$ convergeant absolument pour toutes les valeurs de a_n, la fonction

$$\Sigma \lambda_p x_p = G(x)$$

est une fonction entière

Donc, pour que

$$A_1 = h_1 B_1, \qquad A_2 = h_2 B_2, \qquad \ldots, \qquad A_n = h_n B_n \qquad \ldots$$

soient une solution des équations (1), il suffit que l'on puisse trouver une fonction entière

$$\Sigma \lambda_p x^p = G(x),$$

telle que

$$G(a_n) = h_n$$

et que la série

$$\Sigma \mid \lambda_p S_p \mid$$

converge.

Nous pouvons toujours, d'après le théorème de Weierstrass, construire une fonction entière $F(x)$ qui s'annule pour

$$x = a_1, \qquad x = a_2, \qquad \ldots, \qquad x = a_n, \qquad \ldots$$

et n'ait pas d'autre zéro.

Nous pouvons de même, d'après le théorème de Mittag-Leffler, construire une fonction méromorphe $R(x)$ qui ait pour infinis simples

$$x = a_1, \qquad x = a_2, \qquad \ldots, \qquad x = a_n, \qquad \ldots,$$

avec les résidus respectifs

$$\frac{h_1}{F'(a_1)}, \quad \frac{h_2}{F'(a_2)}, \quad \ldots, \quad \frac{h_n}{F'(a_n)}, \quad \ldots,$$

et n'ayant pas d'autres infinis.

Cette fonction $R(x)$ sera de la forme suivante

$$R(x) = h_1 R_1(x) + h_2 R_2(x) + \ldots + h_n R_n(x) + \ldots;$$

$R_n(x)$ sera une fonction méromorphe de x, indépendante des h et admettant l'infini unique $x = a_n$ avec le résidu $\frac{1}{F'(a_n)}$.

Quand je dis que $R_n(x)$ est indépendant des h, cela ne doit pas s'entendre d'une manière absolue. Le théorème de Mittag-Leffler nous enseigne la manière de former les fonctions R_n, quand les h_n sont donnés de façon que la série $\Sigma h_n R_n$ converge. Il est clair que la série $\Sigma h_n R_n$ peut converger pour certaines valeurs des h et diverger pour d'autres valeurs : en ce sens on peut dire que les fonctions R_n dépendent des h.

Mais supposons, par exemple, qu'on ait trouvé une suite de fonctions R_n, telle que la série

$$\Sigma k_n R_n$$

converge absolument. Alors la série

$$\Sigma h_n R_n$$

convergera aussi absolument, pourvu qu'on ait

$$(2) \qquad |h_n| < |k_n|.$$

Ainsi, pourvu que les h satisfassent aux inégalités (2), les R_n seront indépendants des h.

Posons maintenant

$$G(x) = F(x) R(x), \qquad G_n(x) = F(x) R_n(x),$$

on aura

$$G(x) = \Sigma h_n G_n(x)$$

et

$$G(a_n) = h_n.$$

Soit

$$G_n(x) = \Sigma \lambda_{np} x^p, \qquad G(x) = \Sigma \lambda_p x_p,$$

on aura

$$\lambda_p = h_1 \lambda_{1p} + h_2 \lambda_{2p} + \ldots + h_n \lambda_{np} + \ldots.$$

Si M_n est le plus grand module que puisse prendre la fonction $G_n(x)$ à l'intérieur d'un certain cercle C, il résulte de la manière dont les fonctions G_n ont été formées que

$$\Sigma | h_n M_n |$$

converge; par conséquent la série

$$\Sigma h_n \lambda_{np} x^p$$

convergera absolument pour toutes les valeurs de x intérieures au cercle C ou, puisque ce cercle est quelconque, dans toute l'étendue du plan.

Cela posé, je dis qu'il est impossible que la série

$$\Sigma \lambda_{np} S_p$$

converge absolument; car, si elle était convergente, on pourrait faire

$$(3) \qquad h_1 = h_2 = \ldots = h_{n-1} = h_{n+1} = \ldots = 0, \qquad h_n = 1,$$

et alors la fonction $G_n(x)$ satisferait aux conditions imposées à la fonction $G(x)$, à savoir que $G(a_n) = h_n$, et qu'en remplaçant dans la série qui représente $G(x)$, x^p par S_p, cette série reste absolument convergente. Il en résulterait que les valeurs (3) des h satisferaient aux équations (1), ce qui donnerait

$$B_n = 0,$$

ce que nous ne supposerons pas.

Il faut donc que $\Sigma \mid \lambda_{np} S_p \mid$ diverge et, par conséquent, il est impossible que le rapport

$$\left| \frac{S_{p+1}}{S_p} \right|$$

reste constamment inférieur à une limite donnée.

Posons maintenant

$$G(x) = F(x) H(x) + h_1 G_1(x) + h_2 G_2(x) + \ldots + h_n G_n(x) + \ldots,$$

$H(x)$ étant une fonction entière quelconque. La fonction entière $G(x)$ satisfera à la première condition que nous nous sommes imposée, à savoir que

$$G(a_n) = h_n.$$

Il reste à savoir si elle satisfait à la seconde. Posons

$$F(x) H(x) = \rho_0 + \rho_1 x + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_p x^p + \ldots,$$
$$G(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x^p + \ldots;$$

d'où

$$\lambda_p = \rho_p + h_1 \lambda_{1p} + h_2 \lambda_{2p} + \ldots + h_n \lambda_{np} + \ldots.$$

Nous voulons que la série

$$\Sigma \lambda_p S_p$$

converge absolument; soient

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_p, \quad \ldots$$

une suite de quantités, telle que la série

$$\Sigma \mu_p S_p$$

converge absolument. Si l'on a

$$\lambda_p \mid < \mid \mu_p \mid,$$

la série $\Sigma \lambda_p S_p$ convergera également. Ainsi, si les h satisfont aux inégalités (2) et de plus aux inégalités suivantes

$$|\rho_p + \Sigma h_n \lambda_{np}| < |\mu_p|,$$

ces quantités satisferont aux équations (1).

Pour revenir aux quantités A, si l'on a à la fois les inégalités

$$(4) \qquad |A_n| < |k_n B_n|, \qquad \left|\rho_p + \Sigma A_n \frac{\lambda_{np}}{B_n}\right| < |\mu_p|,$$

les A_n satisferont aux équations

$$(1) \qquad \Sigma A_n a_n^p = 0.$$

Ainsi ces *égalités* en nombre infini peuvent être remplacées par des *inégalités* en nombre infini.

On peut remarquer que dans les inégalités (4) entrent un grand nombre de quantités qui peuvent être choisies arbitrairement dans une certaine mesure. Les k_n sont seulement assujettis à la condition que la série

$$\Sigma |k_n M_n|$$

converge; les μ_p à la condition que la série

$$\Sigma |\mu_p S_p|$$

converge.

Quant aux ρ_p ils sont arbitraires dans une large mesure, car ils sont les coefficients du développement de $F(x)H(x)$, $H(x)$ étant une fonction entière *quelconque*.

Les équations (1) ne suffisent pas en général pour déterminer complètement les rapports des quantités A_n. Mais, ainsi que nous l'avons vu par l'exemple même traité par M. Appell, il peut arriver que ces rapports soient entièrement déterminés par ces équations (1), jointes à la condition qu'une certaine série

$$\Sigma |A_n N_n|$$

soit convergente.

Or cette dernière condition peut être remplacée par une infinité d'inégalités (4 *bis*). Donc les rapports des quantités A_n seront entièrement déterminés par les inégalités (4) et (4 *bis*) qui sont en nombre infini.

Considérons maintenant un Tableau à double entrée, indéfini

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} 1 & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \ldots\ldots & a_{n1} & \ldots\ldots, \\ a_{12} & 1 & a_{32} & a_{42} & \ldots\ldots & a_{n2} & \ldots\ldots, \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{43} & \ldots\ldots & a_{n3} & \ldots\ldots, \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots, \\ a_{1n} & a_{2n} & . & \ldots & a_{n-1,n} & 1 & a_{n+1,n}, \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots\ldots & . & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Dans ce Tableau les termes de la diagonale principale sont tous égaux à 1.

Soit Δ_n le déterminant formé en prenant les n premières lignes et les n premières colonnes du Tableau (5). Je dirai que le Tableau (5) est un déterminant d'ordre infini et que ce déterminant converge si Δ_n tend vers une limite finie et déterminée Δ quand n croît indéfiniment.

Pour nous rendre compte des conditions de convergence d'un déterminant, appuyons-nous sur le mode suivant de génération, qui n'est autre que celui qui est connu sous le nom de *clefs algébriques*.

Soit à développer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Développons le produit

$$\Pi_p(\Sigma_n a_{pn}),$$

puis affectons chacun des termes du produit développé, suivant les cas, de l'un des coefficients $+1$, -1 ou 0; nous obtiendrons ainsi D.

Il est aisé d'en déduire l'inégalité suivante; formons le produit

$$\Pi = \Pi_p(\Sigma_n |a_{pn}|),$$

on aura

$$(6)\qquad |D| < \Pi.$$

Supposons maintenant qu'on remplace dans le déterminant D un certain nombre d'éléments par zéro, le déterminant D deviendra D' et Π deviendra Π'; un certain nombre de termes s'annuleront dans le développement de Π, et les termes correspondants s'annuleront aussi dans le développement de D. On aura alors

$$(7) \qquad |D - D'| < \Pi - \Pi'.$$

Telles sont les deux inégalités très simples qui vont nous servir de point de départ.

Pour que le déterminant Δ d'ordre infini converge, il suffit que le produit Π correspondant, qui s'écrit

$$(8) \quad \begin{cases} (1 + |a_{21}| + |a_{31}| + \ldots + |a_{n1}| + \ldots)(1 + |a_{12}| + |a_{32}| + \ldots + |a_n| + \ldots) \\ (1 + |a_{13}| + |a_{23}| + \ldots) \ldots, \end{cases}$$

converge lui-même ou, d'après un théorème bien connu, que la série

$$|a_{21}| + |a_{31}| + |a_{41}| + \ldots + |a_{n1}| + \ldots + |a_{12}| + |a_{32}| + \ldots + |a_{13}| + \ldots$$

converge elle-même.

En effet, soient Δ_n et Δ_{n+p} les déterminants obtenus en prenant dans le Tableau (5) les n premières, puis les $n+p$ premières lignes et colonnes. Soient Π_n et Π_{n+p} les valeurs correspondantes du produit Π défini plus haut.

Comme dans le Tableau (5) les termes de la diagonale principale sont égaux à 1, on passera de Δ_{n+p} à Δ_n en annulant un certain nombre des éléments de ce déterminant Δ_{n+p} : on aura donc

$$|\Delta_{n+p} - \Delta_n| < \Pi_{n+p} - \Pi_n.$$

Mais, si le produit (8) converge, le second membre de cette inégalité tend vers zéro quand n et p croissent indéfiniment. Il en est donc de même du premier membre, ce qui prouve que Δ_n tend vers une limite finie et déterminée. C. Q. F. D.

Donc, pour que le déterminant Δ converge, il suffit que la série obtenue en prenant dans ce déterminant tous les éléments qui n'appartiennent pas à la diagonale principale converge absolument.

Je vais faire voir maintenant que le déterminant converge absolument, c'est-à-dire qu'on peut modifier l'ordre des colonnes ou des lignes sans changer la valeur limite du déterminant.

Soient en effet deux Tableaux analogues à (5) et ne différant que par l'ordre des colonnes et des lignes. Je supposerai toutefois que, dans l'un comme dans l'autre Tableau, les éléments égaux à 1 occupent la diagonale principale. Soit Δ_n le déterminant obtenu en prenant les n premières lignes et colonnes du premier Tableau. Soit Δ'_p le déterminant obtenu en prenant les p premières lignes et colonnes du second Tableau, p étant assez grand pour que tous les éléments de Δ_n se retrouvent dans Δ'_p. Soient Π_n et Π'_p les produits Π correspondant à Δ_n et Δ'_p. On passera de Δ'_p à Δ_n en annulant dans Δ'_p un certain nombre d'éléments. Je puis donc écrire

$$|\Delta'_p - \Delta_n| < \Pi'_p - \Pi_n.$$

Mais le produit (8) étant absolument convergent, on aura

$$\lim \Pi'_p = \lim \Pi_n \qquad (n, p = \infty).$$

On aura donc aussi

$$\lim \Delta'_p = \lim \Delta_n \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Imaginons maintenant que le Tableau (5) soit indéfini dans les deux sens, de sorte que les colonnes et les lignes soient numérotées depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Le terme qui appartiendra à la fois à la ligne numérotée n et à la colonne numérotée p s'appellera a_{np}. D'ailleurs n et p pourront prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives, y compris la valeur zéro.

Nous appellerons Δ_n le déterminant formé en prenant les $2n+1$ lignes numérotées, $-n$, $-n+1$, $-n+2$, ..., -1, 0, 1, 2, ..., $n-1$, n et les $2n+1$ colonnes portant les mêmes numéros. Le déterminant d'ordre infini convergera si Δ_n tend vers une limite finie et déterminée.

Nous supposerons toujours que les termes de la diagonale principale sont égaux à 1, c'est-à-dire que $a_{nn} = 1$.

Alors, en raisonnant tout à fait comme plus haut, on trouverait que le déterminant converge absolument pourvu que la série

$$\Sigma\,|a_{np}| \qquad (n \gtrless p;\ n, p \text{ variant de } -\infty \text{ à } +\infty)$$

soit convergente.

Supposons maintenant que dans notre Tableau à double entrée, c'est-à-dire d'après la définition qui précède, dans notre déterminant d'ordre infini, on remplace tous les éléments d'une certaine ligne par une suite de quantités

$$\ldots,\ x_{-n},\ \ldots,\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

qui soient toutes plus petites en valeur absolue qu'un certain nombre positif k. Je dis que le déterminant restera convergent si la série

$$\Sigma \mid a_{np} \mid \qquad (n \gtrless p)$$

converge.

En effet, prenons, comme il a été dit plus haut, $2n+1$ lignes et $2n+1$ colonnes dans le Tableau à double entrée, de façon à former le déterminant Δ_n. Supposons que l'on fasse la somme des valeurs absolues des éléments de chaque ligne, en exceptant la ligne dont les éléments ont été remplacés par des quantités x. Faisons ensuite le produit Π_n des $2n$ sommes ainsi obtenues. Un terme quelconque du déterminant Δ_n sera un terme du produit Π_n multiplié par une des quantités x ou par cette quantité changée de signe. Donc, d'après l'hypothèse

$$\mid x_i \mid < k$$

on devra avoir

$$\mid \Delta_n \mid < k\,\Pi_n.$$

Si l'on annule quelques-uns des éléments de Δ_n ce déterminant devient Δ'_n et le produit Π_n devient Π'_n. Quelques-uns des termes du produit Π_n s'annulent et les termes correspondants de Δ_n s'annulent également. On a donc

$$\mid \Delta'_n - \Delta_n \mid < k(\Pi_n - \Pi'_n).$$

Observons maintenant que, pour passer du déterminant Δ_{n+p} au déterminant Δ_n, il suffit d'y annuler certains éléments ; nous trouverons

$$\mid \Delta_{n+p} - \Delta_n \mid < k(\Pi_{n+p} - \Pi_n)$$

et nous en déduirons, comme précédemment, que Δ_n tend vers une limite finie et déterminée, pourvu qu'il en soit ainsi de Π_n, et c'est précisément ce qui arrive quand la série

$$\Sigma \mid a_{np} \mid \qquad (n \gtrless p)$$

converge.

J'arrive maintenant au cas particulier traité par M. Hill. Ce savant astronome envisage l'équation suivante

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \Theta w = 0, \tag{9}$$

où Θ est une série de la forme suivante

$$\Theta = \Theta_0 + 2\Theta_1 \cos t + 2\Theta_2 \cos 2t + 2\Theta_3 \cos 3t + \dots,$$

ce qu'on peut écrire

$$\Theta = \Sigma \Theta_n e^{nit},$$

en supposant que $i = \sqrt{-1}$, que n varie de $-\infty$ à $+\infty$ et que $\Theta_n = +\Theta_{-n}$. Alors la théorie des équations linéaires nous apprend que l'équation (9) admet une intégrale de la forme suivante

$$w = \Sigma b_n e^{(n+c)it}, \tag{10}$$

n variant de $-\infty$ à $+\infty$ et les b_n et c étant des constantes convenablement choisies. Elle admettra en outre l'intégrale

$$w = \Sigma b'_n e^{-(n+c)it}$$

(b'_n étant l'imaginaire conjuguée de b_n) et elle n'en aura pas d'autre.

Les quantités b_n et c seront déterminées par deux conditions :

1° Que la série (10) soit convergente;

2° Que les équations linéaires

$$\Sigma_p \Theta_{n-p} b_p - (n+c)^2 b_n = 0 \quad \begin{pmatrix} p \text{ varie de } -\infty \text{ à } +\infty \\ n \text{ varie de } -\infty \text{ à } +\infty \end{pmatrix} \tag{11}$$

en nombre infini soient satisfaites.

M. Hill a traité ces équations d'après les règles ordinaires du calcul. Bien que cette hardiesse ait été justifiée par le succès, puisqu'il est arrivé ainsi au nombre même donné par l'observation (*mutatis mutandis*), il ne sera peut-être pas hors de propos de démontrer analytiquement la légitimité de sa méthode.

Le déterminant d'ordre infini auquel conduisent les équations (11) est défini comme il suit; en conservant à a_{np} le même sens que plus haut,

$$a_{nn} = \Theta_0 - (n+c)^2 \qquad \text{et} \qquad a_{np} = \Theta_{n-p} \qquad (n \gtrless p).$$

Pour ramener ce déterminant à la forme étudiée plus haut, c'est-à-dire pour faire en sorte que les éléments de la diagonale principale soient tous égaux à 1, nous diviserons la $n^{\text{ième}}$ ligne par $\Theta_0 - (n+c)^2$, ce qui donnera

$$a_{nn} = 1, \qquad a_{np} = \frac{\Theta_{n-p}}{\Theta_0 - (n+c)^2} \qquad (n \gtrless p).$$

On obtiendra ainsi le déterminant que M. Hill a appelé $\square(c)$.

Je dis qu'il est convergent, pour cela il suffit en effet que la série

$$\sum \left| \frac{\Theta_{n-p}}{\Theta_0 - (n+c)^2} \right| \qquad (n \gtrless p)$$

converge. Or cette série est le produit de deux autres, à savoir de

$$\Sigma \mid \Theta_n \mid \qquad (n \gtrless 0,\ n \text{ variant de } -\infty \text{ à } +\infty)$$

ou, ce qui revient au même, de

$$2\Sigma \mid \Theta_n \mid \qquad (n+1,\ 2, \ldots, \text{ ad inf.})$$

et de

$$\sum \frac{1}{\mid \Theta_0 - (n+c)^2 \mid}.$$

Cette dernière série est manifestement convergente et il en est de même de la première dans le cas particulier envisagé par M. Hill. Donc le déterminant $\square(c)$ converge absolument.

Ce premier point établi, on en déduira sans peine les propriétés de ce déterminant, telles qu'elles ont été énoncées par M. Hill. Supposons donc qu'on ait déterminé c, de telle sorte que

$$\square(c) = 0.$$

Remplaçons dans le déterminant $\square(c)$ les éléments d'une ligne quelconque par des indéterminées x. Prenons, par exemple, la ligne numérotée zéro et remplaçons-y

$$\ldots, \quad a_{0-n} = \frac{\Theta_n}{\Theta_0 - c^2}, \quad \ldots, \quad a_{00} = 1, \quad a_{0n} = \frac{\Theta_n}{\Theta_0 - c^2}, \quad \ldots$$

respectivement par

$$., \quad x_{-n}, \quad \ldots, \quad x_0, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots.$$

D'après ce qui précède, le déterminant ainsi obtenu convergera encore, pourvu que les quantités x soient toutes plus petites en valeur absolue qu'un nombre donné k. La valeur limite de ce déterminant d'ordre infini sera évidemment une fonction linéaire des quantités x et pourra s'écrire

$$\ldots + A_{-n}x_{-n} + \ldots + A_0 x_0 + A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n + \ldots.$$

On obtiendra d'ailleurs évidemment A_n, par exemple en donnant à x_n la valeur 1 et aux autres x la valeur zéro.

Je dis que les quantités A_n ainsi définies satisfont aux équations (11). En effet, faisons en particulier, pour une valeur quelconque de n,

$$x_p = a_{np} = \frac{\theta_{n-p}}{\theta_0 - (n+c)^2} \quad (n \gtrless p); \qquad x_n = a_{nn} = 1.$$

Le déterminant ainsi obtenu sera absolument convergent, car la série

$$\sum \left| \frac{\theta_{n-p}}{\theta_0 - (n+c)^2} \right|$$

devant converger, les quantités

$$x_p = \frac{\theta_{n-p}}{\theta_0 + (n+c)^2}$$

auront une valeur absolue limitée. De plus, ce déterminant a pour somme zéro, car il a deux lignes identiques (pourvu que $n \gtrless 0$). Il est encore nul si $n = 0$, car il se réduit alors à $\square(c)$, qui par hypothèse est nul. On a donc

$$\Sigma A_p x_p = 0$$

ou

$$\Sigma A_p \frac{\theta_{n-p}}{\theta_0 - (n+c)^2} + A_n = 0 \qquad (n \gtrless p),$$

ou enfin

$$\Sigma A_p \theta_{n-p} + A_n (n+c)^2 = 0 \qquad (n \gtreqless p). \tag{11}$$

Les équations (11) admettent évidemment une infinité de solutions ; mais nous savons d'avance qu'un seul système de solutions peut donner une série

$$\Sigma A_p e^{(p+c)it}$$

qui soit convergente, car l'équation (9) n'a que deux intégrales. Il reste donc à établir que la série $\Sigma A_p e^{(p+c)it}$ converge.

Or on obtiendra cette série en faisant

$$x_p = e^{(p+c)it},$$

dans le déterminant défini plus haut. Or le module de x_p est égal à 1 et est par conséquent limité.

Donc le déterminant restera convergent. C. Q. F. D.

Je crois qu'après les explications qui précèdent, la belle méthode de M. Hill ne peut plus donner prise à aucune objection.