

BULLETIN DE LA S. M. F.

A.-E. PELLET

Sur les équations du quatrième degré et les fonctions elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 90-93

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__90_1

© Bulletin de la S. M. F., 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur l'équation du quatrième degré et les fonctions
elliptiques; par M. A.-E. PELLET.*

(Séance du 17 mars 1886.)

1. Lorsque les racines d'une équation de degré pair $2m$ peuvent se partager en m groupes de deux racines satisfaisant à une relation de la forme

$$(1) \quad ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0,$$

les racines de chaque groupe étant inégales, on peut ramener l'équation à être réciproque ou à ne contenir que les puissances paires de l'inconnue par une substitution linéaire. Nous considérerons les deux cas, a différent de 0 et a nul.

Premier cas : $a \neq 0$. — L'équation devient réciproque en posant $x = \alpha z + \beta$ et paire en posant $x = \alpha \frac{y + \delta}{y - \delta} + \beta$, α étant égal à $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$, β à $-\frac{b}{a}$, et δ une quantité indéterminée, différente de 0.

Second cas : $a = 0$. — L'équation devient paire en posant $x = \alpha y - \frac{c}{2b}$, et réciproque en posant $x = \alpha \frac{z \pm 1}{z \mp 1} - \frac{c}{2b}$, α étant une quantité indéterminée.

2. Lorsqu'une équation du quatrième degré n'a pas de racines égales, on peut former de trois manières différentes deux groupes

de deux racines; à chaque manière correspond une relation de la forme (1), et, par conséquent, on peut amener l'équation à être paire ou réciproque de trois manières différentes. Soit l'équation

$$X^4 + 4PX^3 + 6QX^2 + 4RX + S = 0$$

ou, en posant $X = x - P$,

$$f(x) = x^4 + 6qx^2 + 4rx + s = 0.$$

Cherchons à rendre cette équation réciproque par la substitution $x = \alpha z + \beta$; on obtient les équations

$$[6f'(\beta)]^2 - f(\beta)[f'''(\beta)]^2 = 0, \quad \alpha^2 = \frac{6f'(\beta)}{f'''(\beta)}.$$

La première développée devient

$$\varphi(\beta) = \beta^3 + \frac{s - 9q^2}{2r} \beta^2 - 3q\beta - \frac{r}{2} = 0,$$

en supposant r différent de 0; puis on a

$$\alpha^2 = 3\beta^2 + \frac{s - 9q^2}{r} \beta - 3q = \varphi'(\beta).$$

D'après sa formation, l'équation $\varphi(\beta) = 0$ admet comme racine toute racine multiple de l'équation $f(x) = 0$, avec le même degré de multiplicité, et réciproquement.

Supposons réels les coefficients de l'équation $f(x) = 0$. Il en est de même des coefficients de l'équation $\varphi(\beta) = 0$. Désignons par $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ses trois racines; on a

$$\alpha_0^2 = \varphi'(\beta_0) = (\beta_0 - \beta_1)(\beta_0 - \beta_2);$$

par conséquent, lorsque les trois racines de l'équation en β sont réelles, les valeurs de α^2 correspondant à la plus grande et à la plus petite sont positives; si l'équation en β n'a qu'une racine réelle, la valeur correspondante de α^2 est positive.

Effectuons la substitution $x = \alpha \frac{y + \delta}{y - \delta} + \beta$, α, β, δ étant réels, ce qui est toujours possible d'après ce qui précède; et soit

$$Ay^4 + By^2 + C = 0$$

l'équation à laquelle on arrive. Les autres transformations pour

obtenir une équation paire seront données par la formule

$$y = \sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{z + \delta}{z - \delta};$$

donc, lorsque les racines de l'équation en β sont réelles, $\frac{C}{A}$ est positif, par suite les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont toutes réelles ou toutes imaginaires; lorsqu'une seule des trois valeurs de β est réelle, $\frac{C}{A}$ est négatif; l'équation $f(x) = 0$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées.

3. Ainsi les intégrales elliptiques peuvent se ramener par une transformation linéaire à la forme

$$\int \frac{F(x) dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^2 + C}},$$

où $F(x)$ est une fonction rationnelle. Si $F(x)$ est une fonction impaire, c'est-à-dire égale à $xf(x^2)$, $f(x^2)$ étant une fonction rationnelle, on voit, en prenant x^2 pour variable, que l'intégrale précédente se ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle. Si $F(x)$ n'est pas une fonction impaire, effectuons la substitution $x = \sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{y + \delta}{y - \delta}$; il vient

$$\int \frac{-2 F(x) \delta \sqrt[4]{\frac{C}{A}} dy}{\sqrt{A'y^4 + B'y^2 + C}},$$

et, si $F\left(\sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{y + \delta}{y - \delta}\right)$ est une fonction impaire, cette dernière se ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle; pour cela, il faut que l'on ait

$$F\left(\sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{y + \delta}{y - \delta}\right) = -F\left(\sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{y - \delta}{y + \delta}\right) \quad \text{ou} \quad F(x) = -F\left(\sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{1}{x}\right)$$

et, dans le cas où $F(x)$ est une fonction paire $F(x^2)$,

$$F(x^2) = -F\left(\frac{C}{Ax^2}\right);$$

ce qui renferme un résultat de M. Hermite (*Journal de M. Resal*; année 1880).

Considérons en particulier l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ et effectuons la substitution $x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{y+1}{y-1}$; on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{k} \sqrt{4(y^2+1)^2 - \frac{(1+k)^2}{k} (y^2-1)^2}}$$

Posons

$$\frac{4k}{(1+k)^2} = k'^2, \quad \frac{1}{k'} \frac{y^2-1}{y^2+1} = u,$$

il vient

$$u = \frac{x(1+k)}{1+kx^2}$$

et

$$(1+k) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}},$$

et l'on est conduit ainsi naturellement à l'échelle des modules de Lagrange (BERTRAND, *Calcul intégral*, nos 650 et suiv.; 659).
