BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur certaines suites de fractions irréductibles

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 93-97
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__93_1>

Sur certaines suites de fractions irréductibles;
par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 7 avril 1886.)

Soit

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_m}{b_m}, \dots\right)$$

une suite de fractions proprement dites, irréductibles, rangées par ordre de grandeur croissante, et telles que, pour toute valeur de l'indice m, on ait

$$b_m + \alpha a_m \leq \mathrm{N},$$

α étant un entier positif, nul ou négatif, N un entier positif. Nous supposons d'ailleurs que $\frac{a_1}{b_1}$ est la plus petite des fractions satisfaisant à la condition requise.

Nous représenterons une telle suite par la notation $\mathfrak{S}(\alpha, \mathrm{N})$, et nous dirons que α est la *caractéristique* et N la *base* de la suite considérée. Lorsque la caractéristique est nulle, on retombe sur les suites dites de Farey, étudiées par Cauchy (*Bulletin des Sciences*, 1816), et M. Stouvenel (*Journal de Liouville,* t. V, 1840).

M. Halphen, dans une remarquable étude sur ce sujet (*Bulletin de la Société mathématique de France,* 1877), a fait connaître une classe étendue de suites de nombres commensurables jouissant de la propriété démontrée par Cauchy pour les suites de Farey, à savoir que *le numérateur de la différence de deux fractions consécutives est égal à l'unité,* d'où l'on déduit que

$$\frac{a_m}{b_m} = \frac{a_{m-1} + a_{m+1}}{b_{m-1} + b_{m+1}}. \tag{1}$$

En particulier, les suites $\mathfrak{S}$, ci-dessus définies, jouissent de cette propriété. Nous avons déduit de là, au sujet de ces suites $\mathfrak{S}$, un certain nombre de remarques dont nous allons énoncer les principales ([1]).

La propriété (1) permet d'abord de trouver la loi d'enchaînement des termes successifs de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, \mathrm{N})$. Cette loi est contenue dans les formules suivantes :

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1, & a_2 = 1; \\ b_1 = \mathrm{N} - \alpha, & b_2 = \mathrm{N} - \alpha - 1; \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_m = \lambda a_{m-1} - a_{m-2} \\ b_m = \lambda b_{m-1} - b_{m-2} \end{array}\right| \lambda = \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{N} + b_{m-2} + \alpha a_{m-2}}{b_{m-1} + \alpha a_{m-1}}\right),$$

$\mathrm{E}(x)$ représentant, suivant l'usage, la partie entière de la quantité x. Mais j'ai remarqué que *la connaissance d'une suite de caractéristique nulle* $\mathfrak{S}(0, \mathrm{N})$ *entraîne la connaissance* IMMÉDIATE *de toutes les suites de même base* $\mathfrak{S}(\alpha, \mathrm{N})$. J'entends par là que l'on peut, connaissant la suite $\mathfrak{S}(0, \mathrm{N})$, écrire immédiatement un terme de rang quelconque de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, \mathrm{N})$, ce qui dispense des longs calculs qui résulteraient de l'application des formules précédentes.

([1]) Nous renvoyons les lecteurs qui voudraient prendre connaissanee de nos démonstrations au Mémoire d'où ces remarques sont extraites. Ce Mémoire paraîtra cette année dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* recueil que notre Société reçoit, bien qu'il ait été omis, par mégarde, sur la liste des échanges placée au commencement du présent Volume.

J'ai, en effet, démontré le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si le $m^{\text{ième}}$ terme de la suite* $\mathfrak{S}(0, N)$ *est* $\frac{a_m}{b_m}$, *le $m^{\text{ième}}$ terme de la suite* $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ *est* $\frac{a_m}{b_m - \alpha a_m}$.

Ainsi, de la suite $\mathfrak{S}(0, 9)$, qui est

$$\frac{1}{9}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{2}{9}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{4}{9}\ \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{9}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{7}{9}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{7}{8}\ \frac{8}{9}$$

on déduit immédiatement

$\mathfrak{S}(1, 9)$........ $\frac{1}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}$

$\mathfrak{S}(2, 9)$........ $\frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}$

$\mathfrak{S}(3, 9)$........ $\frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}$

$\mathfrak{S}(4, 9)$........ $\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$

$\mathfrak{S}(5, 9)$........ $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$

$\mathfrak{S}(6, 9)$........ $\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$

$\mathfrak{S}(7, 9)$........ $\frac{1}{2}$

Lorsque la caractéristique α est négative, auquel cas nous mettrons son signe en évidence en posant $\alpha = -\beta$, le théorème I a besoin d'être complété. En effet, une suite $\mathfrak{S}(-\beta, N)$ a un nombre illimité de termes. A cet égard, j'ai démontré les théorèmes suivants :

THÉORÈME II. — *Si la suite* $\mathfrak{S}(0, N)$ *se compose de* $p-1$ *termes, le $p^{\text{ième}}$ terme de la suite* $\mathfrak{S}(-\beta, N)$ *est égal à* $\frac{1}{\beta+1}$.

THÉORÈME III. — *p étant le rang du terme* $\frac{1}{\beta+1}$ *dans la suite* $\mathfrak{S}(-\beta, N)$, *le terme qui, dans cette suite, occupe le $p^{\text{ième}}$ rang après un terme quelconque* $\frac{a_m}{b_m}$ *est égal à* $\frac{b_m - (\beta - 1)a_m}{(\beta+1)b_m - \beta^2 a_m}$.

Corollaire. — Si $\frac{a_{m+p}}{b_{m+p}}$ est le terme qui occupe le $p^{\text{ième}}$ rang après le terme $\frac{a_m}{b_m}$, on a

$$b_{m+p} - \beta a_{m+p} = b_m - \beta a_m.$$

Les théorèmes I et II font connaître immédiatement les p premiers termes de la suite $\mathfrak{S}(-\beta, \mathrm{N})$. Le théorème III permet de déduire, sans calcul, de ces p premiers termes, les groupes successifs de p termes de cette suite illimitée.

Représentant par $\mathfrak{T}(\alpha, \mathrm{N})$ le nombre des termes de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, \mathrm{N})$, lorsque α n'est pas négatif, on voit immédiatement que, si $\varphi(k)$ représente, suivant l'usage, le nombre des entiers non supérieurs à l'entier k et premiers avec lui, on a

$$\mathfrak{T}(0, \mathrm{N}) = \sum_{k=2}^{k=\mathrm{N}} \varphi(k). \tag{a}$$

J'ai démontré aussi la formule, moins facile à obtenir,

$$\mathfrak{T}(\alpha, \mathrm{N}) = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{k=\mathrm{N}-\alpha+1} \varphi(k). \tag{b}$$

En vertu du théorème II et de la formule (a), on voit que le nombre p, pour une suite à caractéristique négative et de base N, est donné par la formule

$$p = \sum_{k=1}^{k=\mathrm{N}} \varphi(k). \tag{c}$$

Les théorèmes précédents reçoivent une interprétation géométrique fort simple, si l'on convient de représenter la fraction $\frac{a}{b}$ par le point dont les coordonnées rectangulaires sont

$$x = b, \qquad y = a.$$

Dans ce système de représentation, toutes les fractions proprement dites sont données par les sommets d'un réseau à mailles carrées, compris entre l'axe Ox et la bissectrice de l'angle xOy. Le point représentatif de toute fraction irréductible est tel que le segment de droite, qui unit ce point à l'origine, ne contient aucun autre sommet du réseau.

Imposer à une fraction $\frac{a}{b}$ une certaine condition, telle que

$$f(a, b) \leq N,$$

c'est astreindre le point représentatif de cette fraction à se trouver dans une certaine région du plan, limitée par l'axe Ox, la bissectrice de l'angle xOy et la courbe dont l'équation est

$$f(x, y) - N = 0,$$

ce point représentatif pouvant d'ailleurs se trouver sur cette courbe elle-même. Dans le cas des suites $\mathfrak{S}$, auquel se rapporte la présente Note, cette courbe est une droite. Ranger les fractions irréductibles qui répondent à la condition requise par ordre de grandeur croissante, cela revient à prendre ces fractions dans l'ordre où leurs points représentatifs sont successivement atteints par une droite pivotant autour de l'origine O, dans le sens de Ox vers Oy.

La propriété fondamentale liant deux fractions consécutives $\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}$ et $\frac{a_m}{b_m}$, dont les points représentatifs seront désignés par A_{m-1} et A_m, propriété qui s'exprime par l'égalité

$$a_m b_{m-1} - a_{m-1} b_m = 1,$$

se traduit géométriquement comme suit : *La surface du triangle* $A_m A_{m-1} O$ *est égale à* $\frac{1}{2}$.

Le théorème I conduit à l'énoncé géométrique que voici :

Les points représentatifs des termes de même rang, dans toutes les suites de même base, sont régulièrement espacés sur une parallèle à l'axe Ox; *l'équidistance de ces points comprend autant de divisions qu'il y en a entre cette parallèle et l'axe* Ox.

Quant au corollaire du théorème III, il se traduit ainsi :

p étant le rang du terme $\frac{1}{\beta+1}$ *dans la suite* $\mathfrak{S}(-\beta, N)$, *si l'on prend, dans cette suite, tous les termes de p en p, à partir d'un terme quelconque, les points représentatifs de ces termes sont régulièrement espacés sur une droite dont le coefficient angulaire est égal à* $\frac{1}{\beta}$.
