BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

Remarque sur les groupes linéaires d'ordre fini à trois variables

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 152-156
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__152_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Remarque sur les groupes linéaires d'ordre fini à trois variables; par M. É. Picard.

(Séance du 20 avril 1887.)

Considérons d'abord un groupe linéaire G d'ordre fini à deux variables, dont une substitution quelconque sera représentée par

$$(x, y, \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y).$$

On peut remarquer qu'il existe une forme quadratique binaire à indéterminées conjuguées

$$A x x_0 + B x y_0 + B_0 x_0 y + C y y_0 \tag{1}$$

(A et C étant réels, B et B_0 ainsi que x, x_0 et y, y_0 étant respectivement des imaginaires conjuguées), qui se transforme en elle-même quand on effectue sur x et y les substitutions du groupe G; on effectue bien entendu, sur x_0 et y_0, la substitution

$$(x_0, y_0, \alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0, \gamma_0 x_0 + \delta_0 y_0),$$

dont les coefficients sont respectivement conjugués de ceux de la première.

Tous les groupes linéaires d'ordre fini à deux variables pouvant être obtenus en particularisant les constantes qui figurent dans l'équation linéaire du second ordre de la série hypergéométrique, cette remarque n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général que j'ai indiqué autrefois (*Annales de l'École Normale*, 1885) sur le groupe hypergéométrique, et que je prends la liberté de rappeler. Désignant par

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du \qquad (g,\, h = 0,\ 1,\ x,\ \infty)$$

l'intégrale bien connue dans cette théorie; le groupe de l'équation linéaire correspondante peut être obtenu à l'aide des deux substitutions fondamentales

$$\left|\begin{matrix} x & e^{-2(\lambda+b_1)\pi i} \\ y & (e^{-2(\lambda+b_1)\pi i} - e^{-2\lambda\pi i})x + y \end{matrix}\right| \quad \text{et} \quad \left|\begin{matrix} x & x + (e^{2(\lambda+b_2)\pi i} - e^{2\lambda\pi i})y \\ y & e^{2(\lambda+b_2)\pi i}y \end{matrix}\right|,$$

et ces substitutions transforment en elle-même la forme (1), en posant

$$A = \frac{(e^{2\pi b_1 i}-1)(e^{2\pi(\lambda+b_2)i}-1)}{(e^{2\pi b_2 i}-1)(e^{2\pi(\lambda+b_1)i}-1)}, \qquad B = \frac{1-e^{2\pi b_1 i}}{e^{2\pi(\lambda+b_1)i}-1}, \qquad C = 1.$$

On est conduit tout naturellement à se demander si la remarque qui vient d'être faite pour les groupes linéaires d'ordre fini à deux variables peut s'étendre aux groupes d'ordre fini à trois variables. Il en est effectivement ainsi, et il va suffire de prendre les divers types de groupes d'ordre fini à trois variables pour vérifier qu'*il existe une forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées, qui se transforme en elle-même quand on effectue sur les variables les substitutions d'un groupe d'ordre fini.*

L'énoncé précédent souffre une exception pour un seul type de groupe dans lequel se présente une circonstance plus simple encore.

La découverte de tous les groupes d'ordre fini à trois variables est due, comme on sait, à M. Jordan (*Crelle*, t. 84, et *Mémoires couronnés par l'Académie de Naples*, t. XX).

Dans le *premier* type, toutes les substitutions sont de la forme

$$|\; x,\ y,\ z \quad \alpha x + \beta y,\ \alpha' x + \beta' y,\ \gamma z \;|;$$

les coefficients γ étant des racines de l'unité, et les coefficients α, β, α', β', tels que les substitutions à deux variables

$$| \; x \quad y \quad \alpha x + \beta y \quad \alpha' x + \beta' y \; |$$

forment un groupe d'ordre fini. On aura évidemment ici une forme et même une infinité jouissant de la propriété indiquée.

Pour les groupes du *deuxième* ou du *troisième* type, dont les substitutions sont toutes de la forme

$$\begin{gathered} | \; x \quad y \quad z \quad ax \quad by \quad cz \; |, \\ | \; x \quad y \quad z \quad a'y \quad b'z \quad c'x \; |, \\ | \; x \quad y \quad z \quad a''y \quad b''x \quad c''z \; |; \end{gathered}$$

où les a, b, c sont des racines de l'unité, la forme

$$xx_0 + yy_0 + zz_0$$

satisfera évidemment à la question.

Pour le *quatrième* type, le théorème cesse d'être exact; mais on a alors une forme quadratique ternaire ordinaire que reproduisent, à un facteur près, les substitutions du groupe. Celui-ci dérive de la combinaison des substitutions

$$\begin{gathered} | \; x \quad y \quad z \quad \lambda x \quad \lambda y \quad \lambda z \; |, \\ | \; x \quad y \quad z \quad \tau x \quad \tau^{-1} y \quad z \; |, \\ | \; x \quad y \quad z \quad y \quad x \quad z \; |, \end{gathered}$$

$$\begin{vmatrix} x & ax + (1-a)y + 2a(1-a)z \\ y & (1-a)x + ay - 2a(1-a)z \\ z & x - y \quad + (1-2a)z \end{vmatrix},$$

où

$$\tau^5 = 1, \qquad 1 + a(\tau + \tau^{-1} - 2) = 0$$

et λ désignant une racine de l'unité; on vérifie aisément que la forme quadratique

$$z^2 - 5xy$$

se reproduit, à un facteur près, par les substitutions précédentes.

Passons au *cinquième* type. Ce groupe est dérivé de la combinaison des substitutions

$$\begin{vmatrix} x & y & z & \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} x & y & z & x & \theta y & \theta^2_z \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} x & y & z & y & z & x \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} x & y & z & rjx & rj\theta^2 y & rjz \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} x & r^2a(x + y + \theta^2_z \\ y & r^2a(x + \theta y + z \\ z & r^2a(x + \theta^2 y + \theta^2 z) \end{vmatrix},$$

où l'on a

$$\theta^3 = 1, \qquad j^3 = \theta, \qquad a^3 = \frac{1}{3(1-\theta^2)},$$
$$\lambda^{3\rho} = 1, \qquad r^3 = \lambda^\mu \ (\rho \text{ quelconque, mais entier}), \qquad \mu = 0, 1, 2,$$

θ, j, r et λ ayant des modules égaux à l'unité, et aa_0 étant égal à $\frac{1}{3}$. On voit sans peine que toutes ces substitutions transforment en elle-même

$$xx_0 + yy_0 + zz_0.$$

Il n'y a rien à ajouter pour les groupes du *sixième* et du *septième* type, pour lesquels le même fait se vérifie de suite.

Il nous reste à examiner le *huitième* type. Le groupe dérive de la combinaison des substitutions

$$\begin{vmatrix} x & y & z & \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} x & y & z & \tau x & \tau^2 y & \tau^4 z \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} x & y & z & y & z & x \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} x & ax + cy + bz \\ y & cx + by + az \\ z & bx + ay + cz \end{vmatrix},$$

où $r^7 = 1$, et a, b, c sont définis par le système linéaire

$$\begin{aligned} a + b + c &= -1, \\ a + b\tau + c\tau^3 &= 0, \\ a\tau^3 + b\tau^2 + c &= 0, \end{aligned}$$

et λ désignant toujours une racine de l'unité.

C'est encore la forme $xx_0 + yy_0 + zz_0$ qui répond à la question : il suffit de la vérifier pour la dernière substitution : c'est ce qui se fera tout de suite, en remarquant que a, b, c sont réels, et que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$ab + bc + ca = 0,$$

la seconde égalité se démontrant de suite, en remplaçant a, b, c par des quantités proportionnelles tirées des deux dernières équations.

Le théorème énoncé se trouve ainsi démontré.