BULLETIN DE LA S. M. F.

A. H. ANGLIN

Sur le coefficient du terme général dans certains développements

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 192-198
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__192_1>

Sur le coefficient du terme général dans certains développements; par M. A.-H. Anglin.

(Séance du 15 juin 1887.)

La présente Note a pour objet de compléter les résultats obtenus par l'auteur, dans un Mémoire *Sur le coefficient du terme général dans certains développements,* publié en 1886 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

Rappelons sommairement un théorème obtenu dans ce Mémoire, et auquel on aura souvent à se reporter : ce théorème est exprimé par l'équation suivante

$$\begin{aligned}(1 + ax + \ldots + a^n x^n)&(1 + bx + \ldots + b^n x^n)(1 + cx + \ldots + c^n x^n)\\ &= 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + (h_{n+1} - s_{n+1})x^{n+1}\\ &\quad + (h_{n+2} - s_{n+1} h_1)x^{n+2} + \ldots + (h_{n+m} - s_{n+1} h_{m-1})x^{n+m} + \ldots,\end{aligned}$$

où s_r représente la somme $a^r + b^r + c^r$, et h_n la somme des produits homogènes de degré n, des lettres a, b, c et de leurs puissances.

Le coefficient de x^{2n+p} dans ce développement peut être exprimé d'une autre manière plus commode : ce coefficient est en effet celui de x^{2n+p} dans le produit de

$$a^n x^n(1 + a^{-1}x^{-1} + \ldots + a^{-n}x^{-n})$$

par deux expressions analogues en b et c; il est donc égal à $a^n b^n c^n$ multiplié par le coefficient de x^{2n+p} dans le produit

$$\begin{aligned}&(1 + a^{-1}x^{-1} + \ldots + a^{-n}x^{-n})\\ &\quad\times(1 + b^{-1}x^{-1} + \ldots + b^{-n}x^{-n})(1 + c^{-1}x^{-1} + \ldots + c^{-n}x^{-n}),\end{aligned}$$

c'est-à-dire finalement à $(abc)^n h'_{n-p}$, où h'_n est la somme des produits homogènes de degré n, de $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et de leurs puissances.

Cela posé, considérons la formule démontrée dans le Mémoire précité

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = 1 + h_1 x + \ldots + h_n x^n + h_{n+1}x^{n+1} + \ldots.$$

Dans ce Mémoire, nous avons obtenu, toutes les fois que n est multiple de m, la somme de la série

$$\ldots\; h_n x^n + h_{n+m}x^{n+m} + \ldots + h_{n+rm}x^{n+rm} + \ldots.$$

Nous allons donner un résultat analogue, quelle que soit la valeur de n, et en faire une application semblable à celle que nous avons faite dans le cas précité.

Proposons-nous, pour commencer, de trouver la somme de la série

$$\ldots + h_n x^n + h_{n+3}x^{n+3} + \ldots + h_{n+3r}x^{n+3r} + \ldots$$

pour toutes les valeurs de n.

Dans l'équation

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = \ldots + h_n x^n + h_{n+1}x^{n+1} + \ldots,$$

remplaçons x par xy et supposons n de la forme $3m + s$. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^s(1-axy)\ldots} = \ldots + h x^n y^{3m} + \ldots + h_{n+3}x^{n+3}y^{3m+3} + \ldots\\ + h_{n+6}x^{n+6}y^{3m+6} + \ldots;\end{aligned}$$

d'où, faisant successivement y égal à α, β, γ (racines cubiques de l'unité), ajoutant les résultats et observant que $\alpha^r + \beta^r + \gamma^r = 0$, sauf quand r est un multiple de 3, auquel cas la valeur de cette expression est 3, nous aurons

$$3(\ldots + h_n x^n + h_{n+3} x^{n+3} + h_{n+6} x^{n+6} + \ldots + h_{n+3r} x^{n+3r} + \ldots)$$
$$= \frac{1}{\alpha^s(1 - a\alpha x)\ldots} + \frac{1}{\beta^s(1 - a\beta x)\ldots} + \frac{1}{\gamma^s(1 - a\gamma x)\ldots},$$

où l'exposant s représente 0, 1 ou 2 selon que n est de la forme $3m$, $3m+1$ ou $3m+2$.

Lorsque le second membre de cette équation est réduit, le dénominateur peut se mettre sous la forme

$$(1 - a^3x^3)(1 - b^3x^3)(1 - c^3x^3)$$

et le numérateur est la somme de trois termes semblables, dont le premier est le produit de

$$\alpha^{-s}(1 - a\beta x)(1 - a\gamma x)$$

par deux expressions analogues où b et c remplacent a. Or on a

$$(1 - a\beta x)(1 - a\gamma x) = 1 + ax\alpha + a^2x^2\alpha^2;$$

le premier terme du numérateur peut donc s'écrire

$$\alpha^{-s}(1 + ax\alpha + a^2x^2\alpha^2)(1 + bx\alpha + b^2x^2\alpha^2)(1 + cx\alpha + c^2x^2\alpha^2)$$

ou

$$\alpha^{-s}(1 + A_1x\alpha + A_2x^2\alpha^2 + \ldots + A_6x^6\alpha^6);$$

le deuxième et le troisième ne diffèrent du premier que par la substitution de β et γ à α.

Ajoutant ces trois termes et faisant successivement $s = 0$, 1 et 2, les valeurs correspondantes du numérateur deviennent

$$3(1 + A_3x^3 + A_6x^6), \quad 3(A_1x + A_4x^4) \quad \text{et} \quad 3(A_2x^2 + A_5x^5),$$

et l'on a ainsi

$$(\mathrm{F})\left\{\begin{aligned} &\ldots + h_n x^n + h_{n+3} x^{n+3} + h_{n+6} x^{n+6} + \ldots + h_{n+3r} x^{n+3r} + \ldots \\ &= \frac{B_3}{(1 - a^3x^3)(1 - b^3x^3)(1 - c^3x^3)},\end{aligned}\right.$$

où, en vertu du lemme, B_3 représente

$$1 + (h_3 - s_3)x^3 + \mu^2x^6, \quad h_1x + \mu^2h'_2x^4 \quad \text{ou} \quad h_2x^2 + \mu^2h'_1x^5,$$

selon que n est de la forme

$$3m, \quad 3m+1 \quad \text{ou} \quad 3m+2,$$

μ désignant le produit abc.

On peut voir maintenant, comme dans le travail déjà cité, qu'en multipliant successivement chaque membre de l'équation fondamentale

$$a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)=kh_n,$$

où k représente

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b),$$

par

$$a^3+b^3+c^3 \quad \text{ou} \quad s_3,$$

on obtient l'équation

$$\begin{aligned}a^{n+2}(b^3+c^3)^r(b-c)+b^{n+2}(c^3+a^3)^r(c-a)+c^{n+2}(a^3+b^3)^r(a-b)\\ = k(s_3-1)^r[h]^n_{n+3r},\end{aligned}$$

où $(s_3-1)^r[h]^n_{n+3r}$ représente la suite

$$\begin{aligned}&s_3^r\,h_n - rs_3^{r-1}\,h_{n+3}+\frac{r(r-1)}{1.2}\,s_3^{r-2}\,h_{n+6}\\ &-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\,s_3^{r-3}\,h_{n+9}+\ldots+(-1)^r h_{n+3r}.\end{aligned}$$

Développant $(s_3x^3-1)^r$, on voit, en s'appuyant sur la formule (F), que, pour toutes valeurs de n, la série précédente est le coefficient de x^{n+3r} dans le développement de

$$\frac{B_3(s_3x^3-1)^r}{(1-a^3x^3)(1-b^3x^3)(1-c^3x^3)};$$

ce coefficient est donc égal à l'expression

$$\frac{a^{n+2}(b^3+c^3)^r(b-c)+b^{n+2}(c^3+a^3)^r(c-a)+c^{n+2}(a^3+b^3)^r(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

Arrivons maintenant au cas général; pour obtenir la somme des séries

$$\ldots+h_nx^n+h_{n+m}x^{n+m}+\ldots+h_{n+mr}x^{n+mr}+\ldots$$

pour toutes valeurs de n, on remplace x par xy dans l'équation

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}=\ldots+h_nx^n+h_{n+1}x^{n+1}+h_{n+2}x^{n+2}+\ldots,$$

et l'on suppose n de la forme

$$mp+s.$$

On a

$$\frac{1}{y^s(1-axy)\ldots} = \ldots + h_n x^n y^{mp} + \ldots + h_{n+m} x^{n+m} y^{mp+m} + \ldots$$
$$+ h_{n+2m} x^{n+2m} y^{mp+2m} + \ldots.$$

Faisant ensuite y successivement égal à chacune des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, et ajoutant les résultats de ces substitutions, en observant que $\Sigma(\alpha_1^r) = 0$, sauf dans le cas où r est un multiple de m, auquel cas $\Sigma(\alpha_1^r) = m$, on obtient

$$m(\ldots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + \ldots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \ldots)$$
$$= \frac{1}{\alpha_1^s(1-a\alpha_1 x)\ldots} + \frac{1}{\alpha_2^s(1-a\alpha_2 x)\ldots} + \ldots + \frac{1}{\alpha_m^s(1-a\alpha_m x)\ldots};$$

l'indice s est égal à $0, 1, 2, \ldots$ ou $m-1$ selon que n est de la forme

$$mp, \quad mp+1, \quad mp+2, \quad \ldots, \quad mp+m-1.$$

Le second membre de l'équation étant réduit au même dénominateur, ce dénominateur sera

$$(-1)^{(m-1)s}(1-a^m x^m)(1-b^m x^m)(1-c^m x^m);$$

et le numérateur se composera de la somme de m termes semblables, le premier étant le produit de

$$(-1)^{(m-1)s}\alpha_1^{-s}(1-a\alpha_2 x)(1-a\alpha_3 x)\ldots(1-a\alpha_m x)$$

par deux autres expressions semblables où b et c remplacent a. On peut facilement montrer que

$$(1-a\alpha_2 x)(1-a\alpha_3 x)\ldots(1-a\alpha_m x)$$
$$= 1 + ax\alpha_1 + a^2x^2\alpha_1^2 + \ldots + (ax\alpha_1)^{m-1};$$

et ainsi le premier terme du numérateur est égal au produit de α_1^{-s} par les expressions

$$1 + ax\alpha_1 + a^2x^2\alpha_1^2 + a^3x^3\alpha_1^3 + \ldots + (ax\alpha_1)^{m-1},$$
$$1 + bx\alpha_1 + b^2x^2\alpha_1^2 + b^3x^3\alpha_1^3 + \ldots + (bx\alpha_1)^{m-1},$$
$$1 + cx\alpha_1 + c^2x^2\alpha_1^2 + c^3x^3\alpha_1^3 + \ldots + (cx\alpha_1)^{m-1};$$

il est donc de la forme

$$\alpha_1^{-s}[1 + A_1 x\alpha_1 + A_2 x^2\alpha_1^2 + A_3 x^3\alpha_1^3 + \ldots + A_{3m-3}(x\alpha_1)^{3m-3}],$$

tandis que le deuxième, le troisième, ..., le $m^{\text{ième}}$ terme du numérateur ont la même forme, en changeant seulement α_1 en $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$.

Ajoutant ces diverses expressions et faisant s successivement égal à 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$, les valeurs correspondantes du numérateur complet deviennent pour $s=0,1,\ldots,m-3$

$$\begin{aligned}
&m(1+A_m x^m + A_{2m} x^{2m}),\\
&m(A_1 x + A_{m+1} x^{m+1} + A_{2m+1} x^{2m+1}),\\
&m(A_2 x^2 + A_{m+2} x^{m+2} + A_{2m+2} x^{2m+2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&m(A_{m-3} x^{m-3} + A_{2m-3} x^{2m-3} + A_{3m-3} x^{3m-3}),
\end{aligned}$$

dont la dernière renferme la plus haute puissance possible de x; tandis que les numérateurs correspondant aux deux dernières valeurs de s, soit $m-2$ et $m-1$, ont chacun seulement deux termes, soit

$$\begin{aligned}
&m(A_{m-2} x^{m-2} + A_{2m-2} x^{2m-2}),\\
&m(A_{m-1} x^{m-1} + A_{2m-1} x^{2m-1}).
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$\text{(G)}\left\{\begin{aligned}
&\ldots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + h_{n+2m} x^{n+2m} + \ldots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \ldots\\
&= \frac{B_m}{(1-a^m x^m)(1-b^m x^m)(1-c^m x^m)},
\end{aligned}\right.$$

où B_m représente

$$\begin{aligned}
&1 + (h_m - s_m) x^m + \mu^{m-1} h'_{m-3} x^{2m},\\
&h_1 x + (h_{m+1} - s_m h_1) x^{m+1} + \mu^{m-1} h'_{m-4} x^{2m+1},\\
&h_2 x^2 + (h_{m+2} - s_m h_2) x^{m+2} + \mu^{m-1} h'_{m-5} x^{2m+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&h_{m-3} x^{m-3} + (h_{2m-3} - s_m h_{m-3}) x^{2m-3} + \mu^{m-1} h'_0 x^{3m-3},\\
&\qquad h_{m-2} x^{m-2} + \mu^{m-1} h'_{m-1} x^{2m-2} \qquad\qquad (h'_0 = 1),\\
&\qquad h_{m-1} x^{m-1} + \mu^{m-1} h'_{m-2} x^{2m-1},
\end{aligned}$$

selon que n est de la forme

$$mp,\quad mp+1,\quad \ldots,\quad mp+m-1.$$

On voit maintenant, comme plus haut, que l'on a

$$a^{n+2}(b^m + c^m)^r (b-c) + \ldots = k(s_m - 1)^r [h]^n_{n+mr},$$

où $(s_m - 1)^r [h]^n_{n+mr}$ représente la série

$$\begin{aligned}
&s_m^r h_n - r s_m^{r-1} h_{n+m} + \frac{r(r-1)}{1.2} s_m^{r-2} h_{n+2m}\\
&\quad - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_m^{r-3} h_{n+3m} + \ldots + (-1)^r h_{n+rm}.
\end{aligned}$$

Si l'on développe $(s_m x^m - 1)^r$ on verra, en tenant compte de (G), que, pour toutes valeurs de n, la série précédente forme le coefficient de x^{n+mr} dans le développement de

$$\frac{B_m(s_m x^m - 1)^r}{(1-a^m x^m)(1-b^m x^m)(1-c^m x^m)},$$

B_m représentant une des m expressions ci-dessus mentionnées et, par conséquent, ce coefficient est égal à l'expression

$$\frac{a^{n+2}(b^m+c^m)^r(b-c)+b^{n+2}(c^m+a^m)^r(c-a)+c^{n+2}(a^m+b^m)^r(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

Nous pouvons observer que, des précédentes expressions représentées par B_m, les deux dernières correspondent l'une à l'autre; tandis que des $m-2$ autres, la première et la dernière, la deuxième et l'avant-dernière, la troisième et l'antépénultième, etc., se correspondent respectivement, les indices de h et h' dans l'une étant les mêmes que ceux de h' et h dans l'autre.