BULLETIN DE LA S. M. F.

R. PERRIN

Sur le système de quatre formes binaires simultanées (deux linéaires et deux quadratiques)

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 45-61
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__45_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur le système de quatre formes binaires simultanées (deux linéaires et deux quadratiques); par M. R. Perrin.

(Séance du 2 février 1887.)

1. L'objet du présent travail est d'établir d'une manière complète, en vue surtout d'une application ultérieure à la théorie des formes ternaires ([1]), les relations, ou syzygies, qui existent entre les invariants du système de quatre formes binaires simultanées, savoir deux formes linéaires et deux formes quadratiques. Bien que relativement simple, ce système possède déjà, comme on le verra, treize invariants distincts, reliés par vingt syzygies indépendantes, dont chacune peut être transportée dans le domaine ternaire.

J'emploierai exclusivement pour cette étude les procédés indiqués dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, t. XCVI, p. 426; 1883), procédés qui reposent sur les principes suivants :

1° Étant donné un système composé d'autant de formes binaires indépendantes et de tel ordre qu'on voudra, de tous leurs invariants et covariants, si l'une quelconque des formes de ce système est

$$w = w_0 x^n + n w_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} w_2 x^{n-2} y^2 + \ldots.$$

([1]) Le principe de cette application a été donné dans une série de Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janvier 1887.

et qu'on effectue la substitution

$$x = X - w_1 Y, \qquad y = w_0 Y,$$

tous les coefficients, dans toutes les formes du système, deviendront des péninvariants.

2° Cette transformation des coefficients étant ainsi opérée, tout procédé de formation d'un péninvariant du système donne, par le fait même qu'on l'écrit, une syzygie entre le covariant correspondant, multiplié par une certaine puissance de w (celle précisément qui convient pour rétablir l'homogénéité), et les covariants dont les péninvariants figurent dans la composition des coefficients employés.

3° Étant donnée une syzygie entre des formes du système, on peut toujours la considérer comme exprimant qu'un certain covariant composé, d'ordre m par exemple, est identiquement nul ; dès lors, le second, le troisième, ..., le $m^{\text{ième}}$ coefficient de ce covariant composé, sont aussi identiquement nuls, ce qui permet d'écrire immédiatement m nouvelles syzygies, en général distinctes de la première.

Je m'appuierai enfin sur ce théorème :

Si l'on ajoute à un système quelconque de formes binaires indépendantes une forme linéaire, les seules formes nouvelles qui s'ajoutent aux formes covariantes et invariantes du système primitif sont celles qu'on obtient en opérant avec la forme linéaire ajoutée sur chacune des formes, tant indépendantes que covariantes, de ce système primitif, savoir une fois sur les formes linéaires; une fois, et deux fois sur les formes quadratiques; une, deux et trois fois sur les formes cubiques, et ainsi de suite. En particulier, il s'introduit précisément autant d'invariants nouveaux qu'il existait de formes distinctes dans le système primitif, savoir les résultants de chacune de ces formes et de la forme linéaire ajoutée.

La démonstration de ce théorème, sous un énoncé un peu différent, se trouve dans la *Théorie des formes binaires* de Clebsch (§ 55); on peut d'ailleurs l'établir très simplement, sans l'intervention du calcul symbolique, de la manière suivante :

Soit

$$u = a_0 x + a_1 y$$

la forme linéaire indépendante ajoutée, et

$$v = v_0 x^p + p v_1 x^{p-1} y + \ldots$$

un quelconque des covariants (ou invariants) qui s'introduisent ainsi. Le péninvariant (ou invariant) v_0 contiendra les coefficients de u à un degré q différent de zéro ; on pourra donc l'écrire

$$v_0 = a_0^q s_0 + q a_0^{q-1} a_1 s_1 + \frac{q(q-1)}{1.2} a_0^{q-2} a_1^2 s_2 + \ldots + a_1^q s_q,$$

$s_0, s_1, \ldots, s_q$ ne contenant plus que les coefficients des formes indépendantes composant le système primitif. On sait que v_0 doit, pour être un péninvariant, satisfaire à l'équation différentielle

$$a_0 \frac{dv_0}{da_1} + \frac{dv_0}{dz} = 0,$$

où $\frac{dv_0}{dz}$ désigne un ensemble d'opérations de dérivation qui ne portent que sur les coefficients autres que a_0 et a_1. Cette équation différentielle peut donc s'écrire

$$a_0 \left[q a_0^{q-1} s_1 + \frac{q(q-1)}{1} a_0^{q-2} a_1 s_2 + \ldots + q a_1^{q-1} s_q \right]$$
$$+ a_0^q \frac{ds_0}{dz} + q a_0^{q-1} a_1 \frac{ds_1}{dz} + \frac{q(q-1)}{1.2} a_0^{q-2} a_1^2 \frac{ds_2}{dz} + \ldots + a_1^q \frac{ds_q}{dz} = 0.$$

Mais, pour que cette équation ait lieu identiquement, il faut que les coefficients de a_0^q, $a_0^{q-1} a_1, \ldots, a_1^q$ s'évanouissent identiquement ; ce qui donne le système de conditions

$$\begin{aligned}
\frac{ds_0}{dz} &= -q s_1, \\
\frac{ds_1}{dz} &= -(q-1) s_2, \\
\frac{ds_2}{dz} &= -(q-2) s_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{ds_{q-1}}{dz} &= -s_q, \\
\frac{ds_q}{dz} &= 0.
\end{aligned}$$

Or ces relations sont précisément celles qui sont nécessaires et suffisantes pour définir les q premiers coefficients d'un covariant s

qui ne dépend plus que des formes du système primitif, savoir

$$s = s_q x^{p+q} - (p+q)\, s_{q-1}\, x^{p+q-1} y + \dots \pm \frac{(p+q)(p+q-1)\dots(p+1)}{1.2\dots q} s_0 x^p y^q \mp \dots$$

(l'ordre $p+q$ de ce covariant se trouve déterminé par la condition que sa source s_q ait le poids convenable, étant connu le poids de v_0).

Si l'on opère q fois avec u sur ce covariant s qui faisait donc partie du système primitif, c'est-à-dire si on lui applique l'opérateur

$$a_0^q \frac{d^q}{dy^q} - q a_0^{q-1} a_1 \frac{d^q}{dy^{q-1}\, dx} + \dots \pm a_1^q \frac{d^q}{dx^q},$$

le covariant obtenu aura pour coefficient de x^p

$$\pm (p+q)(p+q-1)\dots(p+1)\,(a_0^q s_0 + q_1 a_0^{q-1} a_1 s_1 + \dots + a_1^q s_q),$$

c'est-à-dire précisément v_0, à un coefficient numérique près; il ne diffère donc de v que par ce coefficient numérique.

Il est ainsi démontré que tout covariant v du système complété par l'adjonction d'une forme linéaire indépendante peut s'obtenir en opérant un certain nombre de fois avec cette forme sur un des covariants du système primitif; ce qui équivaut à l'énoncé donné plus haut.

2. Cela posé, soient données les quatre formes indépendantes

$$(1)\qquad \begin{cases} u = a_0 X + a_1 Y, \\ u' = a'_0 X + a'_1 Y, \\ v = b_0 X^2 + 2 b_1 XY + b_2 Y^2, \\ v' = b'_0 X^2 + 2 b'_1 XY + b'_2 Y^2. \end{cases}$$

Effectuons la substitution $X = x - a_1 y$, $Y = a_0 y$, dont le déterminant est a_0, source de la forme u. Il vient

$$(2)\qquad \begin{cases} u = u_0 x, \qquad u' = u'_0 x + \Lambda y, \\ v = v_0 x^2 + 2\pi_0 xy + A y^2, \\ v' = v'_0 x^2 + 2\pi'_0 xy + A' y^2, \end{cases}$$

en posant

$$(3)\qquad \begin{cases} \Lambda = a_0 a'_1 - a_1 a'_0. \\ \pi_0 = a_0 b_1 - a_1 b_0. \\ \pi'_0 = a_0 b'_1 - a_1 b'_0. \\ A = a_1^2 b_0 - 2 a_0 a_1 b_1 + a_0^2 b_2. \\ A' = a_1^2 b'_0 - 2 a_0 a_1 b'_1 + a_0^2 b'_2. \end{cases}$$

et, en écrivant u_0, u'_0, v_0, v'_0 au lieu de a_0, a'_0, b_0, b'_0, pour rappeler les formes dont ces coefficients sont les sources, Λ, A, A′ sont évidemment trois invariants, savoir les résultants de u et de chacune des trois formes fondamentales u', v, v'; π_0 et π'_0 sont des péninvariants, sources des deux covariants π et π', qui sont évidemment le jacobien de u et v, et celui de u et v'. Ces jacobiens sont en effet définis par les opérations

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx},\quad \frac{du}{dx}\frac{dv'}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv'}{dx},$$

lesquelles donnent respectivement

$$2u_0(\pi_0 x+\mathrm{A}y),\qquad 2u_0(\pi'_0 x+\mathrm{A}'y).$$

Nous pouvons donc les écrire ainsi

$$(4)\qquad \begin{cases} \pi=\pi_0 x+\mathrm{A}y,\\ \pi'=\pi'_0 x+\mathrm{A}'y. \end{cases}$$

Construisons d'abord les formes du système partiel composé seulement de v et de v'. Ces formes consistent, comme on sait, en trois invariants, savoir les discriminants D et D′ des deux formes, et un invariant commun

$$\mathrm{I}=b_0b'_2+b_2b'_0-2b_1b'_1\,;$$

plus un seul covariant, le jacobien de u et u', que je désignerai par σ. En prenant u et u' sous les formes données par les équations (2), on a immédiatement les trois syzygies

$$(5)\qquad u^2\mathrm{D}=\mathrm{A}v-\pi^2,$$

$$(6)\qquad u^2\mathrm{D}'=\mathrm{A}'v'-\pi'^2,$$

$$(7)\qquad u^2\mathrm{I}=\mathrm{A}v'+\mathrm{A}'v-2\pi\pi'.$$

Si l'on forme les syzygies dérivées, en écrivant que les second et troisième termes des covariants identiquement nuls

$$u^2\mathrm{D}-\mathrm{A}v+\pi^2,\quad u^2\mathrm{D}'-\mathrm{A}'v'+\pi'^2,\quad u^2\mathrm{I}-\mathrm{A}v'-\mathrm{A}'v+2\pi\pi'$$

sont également nuls, on n'obtient aucune syzygie nouvelle, mais de pures identités.

Le jacobien σ de v et v' est défini par l'opération

$$\frac{dv}{dx}\frac{dv'}{dy}-\frac{dv}{dy}\frac{dv'}{dx},$$

qui donne

$$4[(v_0\pi'_0 - v'_0\pi_0)x^2 + (A'v_0 - Av'_0)xy + (A'\pi_0 - A\pi'_0)y^2].$$

Le coefficient de x^2 fournit immédiatement la syzygie

$$u\sigma = v\pi' - v'\pi, \tag{8}$$

qui relie σ aux formes déjà trouvées. Le second et le troisième coefficient de σ devant être aussi des péninvariants, il faut que $A'v_0 - Av'_0$, $A'\pi_0 - A\pi'_0$ soient divisibles par u_0; désignons par p, Γ le covariant linéaire et l'invariant correspondants; nous avons immédiatement, pour définir ces deux nouvelles formes, les deux syzygies

$$up = A'v - Av', \tag{9}$$

$$u\Gamma = A'\pi - A\pi'. \tag{10}$$

En effectuant les calculs, on trouve pour le péninvariant p_0, source de p, et pour l'invariant Γ, les valeurs suivantes

$$p_0 = a_0(b_0b'_2 - b_2b'_0) + 2a_1(b_1b'_0 - b_0b'_1),$$
$$\Gamma = a_0^2(b_1b'_2 - b_2b'_1) + a_0a_1(b_2b'_0 - b_0b'_2) + a_1^2(b_0b'_1 - b_1b'_0).$$

Les expressions complètes des covariants σ et p sont d'ailleurs, en vertu de (8), (9), (10) et (2),

$$\left\{\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0x^2 + p_0xy + \Gamma y^2, \\ p &= p_0x + 2\Gamma y. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Γ est évidemment le résultant de u et σ, et p le jacobien de u et σ.

Multiplions les deux membres de (10) par 2π, remplaçons π^2 et $2\pi\pi'$ au moyen de (5) et (7), puis $A'v - Av'$ au moyen de (9); nous pourrons diviser par u, et nous obtiendrons la syzygie

$$2\Gamma\pi = Ap + u(AI - 2A'D). \tag{12}$$

En multipliant (10) par $2\pi'$ et utilisant de même les relations (6), (7) et (9), on obtient la syzygie analogue

$$2\Gamma\pi' = A'p - u(A'I - 2AD'). \tag{13}$$

Enfin, multipliant (10) par 2Γ, remplaçant $2\Gamma\pi$ et $2\Gamma\pi'$ au moyen de (12) et (13) et divisant par $2u$, il vient

$$\Gamma^2 = AA'I - A'^2D - A^2D'. \tag{14}$$

C'est la première des relations entre invariants que nous nous proposions d'obtenir.

3. D'après le théorème démontré plus haut, nous connaissons déjà toutes les formes du système qui ne comprend pour formes fondamentales que u, v et v'. En effet, le système de v et v' n'admet, en dehors des invariants D, D' et I, que le seul covariant σ. En ajoutant la forme fondamentale u, on n'introduit que les formes obtenues en opérant avec u une et deux fois sur v, sur v' et sur σ, soit en tout six formes nouvelles ; l'opération en question se réduit d'ailleurs ici à une différentiation par rapport à y ; et elle donne les trois covariants linéaires π, π' et p, puis les trois invariants A, A', Γ.

Toutefois, avant d'introduire la quatrième forme fondamentale u', je vais tirer des syzygies trouvées plus haut quelques autres syzygies, qui nous seront utiles dans la suite.

Si l'on multiplie (8) successivement par 2π et $2\pi'$, qu'on remplace π^2, $\pi\pi'$, π'^2 au moyen de (5), (6), (7), et qu'on tienne compte de (9), on obtient, en divisant par u, les deux syzygies

$$2\pi\,\sigma = vp + u(2\mathrm{D}v' - \mathrm{I}v), \tag{15}$$

$$2\pi'\sigma = v'p + u(\mathrm{I}v' - 2\mathrm{D}'v). \tag{16}$$

Si l'on multiplie (8) par 2σ, qu'on remplace $2\pi\sigma$ et $2\pi'\sigma$ au moyen de (15) et (16) et qu'on divise par $2u$, on obtient

$$\sigma^2 = \mathrm{I}vv' - \mathrm{D}v'^2 - \mathrm{D}'v^2, \tag{17}$$

syzygie d'ailleurs bien connue dans la théorie de deux formes quadratiques binaires simultanées.

Multiplions (10) par 2σ, remplaçons $2\pi\sigma$ et $2\pi'\sigma$ au moyen de (15) et (16), $\mathrm{A}'v - \mathrm{A}v'$ au moyen de (9), et divisons par u ; il viendra

$$2\Gamma\sigma = p^2 + (2\mathrm{AD}' - \mathrm{A}'\mathrm{I})v + (2\mathrm{A}'\mathrm{D} - \mathrm{AI})v'. \tag{18}$$

Les syzygies (5), (6), (7), (12), (13), (14), (15), (16), (17) et (18) permettent d'exprimer en fonction des formes droites

$$(u, v, v', p, \mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{D}, \mathrm{D}', \mathrm{I}),$$

du système restreint que nous avons considéré jusqu'ici, tous les carrés et produits deux à deux des formes gauches (σ, π, π', Γ) de ce système. Pour plus de commodité, j'ai désigné les formes gauches par des lettres grecques, et les invariants par des majuscules, notation que je continuerai à appliquer dans la suite de cette étude.

En éliminant deux des formes gauches entre les trois syzygies qui donnent leurs carrés et leur double produit, on peut obtenir six syzygies entre formes droites, mais qui se réduisent à deux distinctes, savoir : la syzygie (9) et la suivante :

$$(19)\quad p^2 + u^2(I^2 - 4DD') + 2(2AD' - A'I)\,\varphi + 2(2A'D - AI)\,\varphi' = 0.$$

Formons maintenant les syzygies dérivées de (15), (16), (17), (18). Les seconds termes de (15) et (16) donnent respectivement

$$(20)\qquad A\sigma - \Gamma\varphi = u(2D\pi' - I\pi),$$

$$(21)\qquad A'\sigma - \Gamma\varphi' = u(I\pi' - 2D'\pi).$$

Les troisièmes termes donneraient (12) et (13). Le second terme de (17) donne

$$(22)\qquad p\sigma + (2D'\varphi - I\varphi')\,\pi + (2D\varphi' - I\varphi)\,\pi' = 0.$$

Le troisième terme donne une relation qui se ramène à (18) et (19). Le second terme de (18) donne

$$(23)\qquad \Gamma p + (2AD' - A'I)\,\pi + (2A'D - AI)\,\pi' = 0$$

et le troisième terme ramène à (14). Enfin le second et le troisième terme de (19) conduisent encore à (23) et (14).

De (18) et de (19) on tire

$$(23\ bis)\qquad 4\Gamma\sigma = p^2 - u^2(I^2 - 4DD'),$$

syzygie qui montre en passant que les deux facteurs linéaires du covariant σ sont

$$p \pm u\sqrt{I^2 - 4DD'}.$$

4. Introduisons maintenant la seconde forme linéaire

$$u' = u'_0 x + \Lambda y.$$

Nous avons à opérer avec elle sur chacune des formes trouvées jusqu'ici, savoir u, φ, φ', π, π', σ et p.

En opérant sur u, nous obtenons l'invariant Λ, résultant de u' et u.

En opérant une fois sur v, il vient

$$2(u'_0\pi_0 - \Lambda v_0) + 2(\Lambda u'_0 - \Lambda\pi_0)y,$$

ce qui nous apprend l'existence d'un covariant linéaire π'' et d'un invariant B, définis par les syzygies

$$u\pi'' = u'\pi - \Lambda v, \tag{24}$$

$$u\mathrm{B} = \Lambda u' - \Lambda\pi, \tag{25}$$

l'expression complète de π'' étant d'ailleurs

$$\pi'' = \pi''_0 x + \mathrm{B}y. \tag{26}$$

En opérant une seconde fois avec u' sur v ou, ce qui revient au même, une fois avec u' sur π'', nous obtenons un nouvel invariant C, défini par la syzygie

$$u\mathrm{C} = u'\mathrm{B} - \Lambda\pi''. \tag{27}$$

En opérant de même avec u' sur v', nous obtiendrons évidemment un covariant linéaire π''' et deux invariants B′, C′, définis respectivement par les syzygies

$$u\pi''' = u'\pi' - \Lambda v', \tag{28}$$

$$u\mathrm{B}' = \Lambda' u' - \Lambda\pi', \tag{29}$$

$$u\mathrm{C}' = u'\mathrm{B}' - \Lambda\pi''', \tag{30}$$

et le covariant π''' aura pour expression complète

$$\pi''' = \pi'''_0 x + \mathrm{B}'y. \tag{31}$$

En opérant avec u' sur π et π', on retrouve les invariants B et B′.

Opérons maintenant sur σ; il vient

$$(u'_0 p_0 - 2\Lambda\sigma_0)x + (2\Gamma u'_0 - \Lambda p_0)y,$$

ce qui démontre l'existence d'un covariant linéaire p' et d'un invariant Λ', définis par les syzygies

$$up' = u'p - 2\Lambda\sigma, \tag{32}$$

$$u\Lambda' = 2\Gamma u' - \Lambda p, \tag{33}$$

le covariant p' ayant pour expression complète

$$p' = p'_0 x + \Lambda' y. \tag{34}$$

En opérant une seconde fois sur σ, ou une première fois sur p', nous obtenons l'invariant Γ', défini par

$$2u\Gamma' = u'\Lambda' - \Lambda p'. \tag{35}$$

(La présence du coefficient 2 se justifie par ce fait qu'en effectuant les calculs on trouverait bien, pour Γ', une fonction entière des coefficients primitifs.)

Enfin, en opérant avec u' sur p, on retombe sur l'invariant Λ'.

Le système de formes est donc maintenant complet; il ne reste qu'à établir les syzygies reliant les dernières formes introduites entre elles et avec les précédentes.

5. Il est tout d'abord aisé de voir que π'', π''', p', C, C' et Γ' jouent respectivement le même rôle, dans le système partiel (u', v, v'), que π, π', p, A, A' et Γ, dans le système partiel (u, v, v'). En effet, si l'on multiplie (8) par u', qu'on remplace $u'\pi'$ et $u'\pi$ au moyen de (28) et (24), il vient, en divisant par u,

$$u'\sigma = v\pi''' - v'\pi'', \tag{36}$$

qui est l'analogue de (8) : π'' et π''' sont donc les analogues de π et π'. D'autre part, en multipliant (9) par u', remplaçant $\Lambda'u'$ et $\Lambda u'$ au moyen de (29) et (25), tenant compte de (8) et divisant par u, il vient

$$u'p = \Lambda\sigma + B'v - Bv', \tag{37}$$

d'où, comparant avec (32),

$$up' = B'v - Bv' - \Lambda\sigma. \tag{38}$$

Si alors on multiplie (38) par u', qu'on remplace $u'B'$ et $u'B$ au moyen de (30) et de (27), qu'on tienne compte de (36) et qu'on divise par u, il viendra

$$u'p' = C'v - Cv', \tag{39}$$

qui est l'analogue de (9); et ainsi de suite.

Le second terme de (38) donne

$$u\Lambda' = 2B'\pi - 2B\pi' - \Lambda p; \tag{40}$$

d'où, comparant avec (33),

$$B\pi' - B'\pi + \Gamma u' = 0. \tag{41}$$

Le second terme de (41) donne

$$BA' - AB' + \Gamma\Lambda = 0, \tag{42}$$

syzygie qui exprime le produit des deux invariants gauches Γ, Λ, en fonction des invariants droits.

D'autre part, multiplions (24) par B', (28) par $-B$, et ajoutons; il vient

$$u(B'\pi'' - B\pi''') = u'(B'\pi - B\pi') + \Lambda(B\nu' - B'\nu).$$

Mais, en vertu de (40) et de (32), combiné avec (38), on a

$$\begin{aligned} B'\pi - B\pi' &= \tfrac{1}{2}(u\Lambda' + \Lambda p), \\ B\nu' - B'\nu &= -\tfrac{1}{2}(up' + u'p). \end{aligned}$$

La syzygie ci-dessus devient donc, en divisant par u,

$$B'\pi'' - B\pi''' = \tfrac{1}{2}(u'\Lambda' - \Lambda p') = u\Gamma', \tag{43}$$

en vertu de (35). Cette syzygie (43) est l'analogue de (41), et fait ressortir l'analogie de Γ' avec Γ. Les invariants B, B' ne changent pas, et Λ change seulement de signe quand on permute les coefficients de u et de u'.

Nous pourrions donc écrire immédiatement toute une série de syzygies, analogues de celles qui ont été données précédemment; je me bornerai à celle-ci, qui a lieu entre invariants,

$$CB' - BC' + \Lambda\Gamma' = 0, \tag{44}$$

analogue de (42).

6. On peut remarquer, en passant, que toutes les formes du système complet peuvent s'exprimer en fonction rationnelle des invariants et des deux formes linéaires indépendantes u, u', avec une puissance de leur résultant Λ comme dénominateur. En effet, les syzygies (25), (29), (27), (30), (33), (35) donnent déjà les covariants linéaires π, π', π'', π''', p, p', exprimés de cette manière, savoir

$$\left\{\begin{aligned} \Lambda\pi &= A u' - B u, \\ \Lambda\pi' &= A'u' - B'u, \\ \Lambda\pi'' &= B u' - C u, \\ \Lambda\pi''' &= B'u' - C'u, \\ \Lambda p &= 2\Gamma u' - \Lambda' u, \\ \Lambda p' &= \Lambda' u' - 2\Gamma' u. \end{aligned}\right. \tag{45}$$

Alors (28), (29) et (32) donnent, par un calcul facile,

$$(46)\qquad A^2 v = A u'^2 - 2 B u u' + C u^2,$$

$$(47)\qquad A^2 v' = A' u'^2 - 2 B' u u' + C' u^2.$$

$$(48)\qquad A^2 \sigma = \Gamma u'^2 - \Lambda' u u' + \Gamma' u^2.$$

A l'inspection de ces syzygies, on voit immédiatement que $AC - B^2$, $A'C' - B'^2$, $AC' + CA' - 2BB'$ doivent être respectivement égaux à D, D', I, multipliés par une puissance de Λ choisie de manière à rétablir l'homogénéité, ce qui donne les trois syzygies entre invariants

$$(49)\qquad AC - B^2 = D\Lambda^2,$$

$$(50)\qquad A'C' - B'^2 = D'\Lambda^2,$$

$$(51)\qquad AC' + CA' - 2BB' = I\Lambda^2.$$

Le discriminant de σ, formé au moyen de (11), est

$$\Gamma\sigma - \tfrac{1}{4}p^2,$$

c'est-à-dire, d'après la syzygie (23 *bis*),

$$DD' - \tfrac{1}{4}I^2.$$

En le formant au moyen de l'expression (48), on obtient la syzygie

$$(52)\qquad 4\Gamma\Gamma' - \Lambda'^2 = (4DD' - I^2)\Lambda^2.$$

L'invariant commun de σ et de v, formé au moyen de (2) et de (11), est donné par

$$\Gamma v + A\sigma - p\pi.$$

Mais, en ajoutant les syzygies (10), (8) et (9) respectivement multipliés par v, A, $-\pi$, on trouve

$$(53)\qquad \Gamma v + A\sigma - p\pi = 0.$$

L'invariant commun dont il s'agit est donc identiquement nul; en le formant au moyen des expressions (46) et (48), on obtient la syzygie

$$(54)\qquad A\Gamma' + C\Gamma - B\Lambda' = 0.$$

De même l'invariant commun de σ et v', égalé à zéro, donne

$$(55)\qquad A'\Gamma' + C'\Gamma - B'\Lambda' = 0.$$

Si l'on retranche (55) multiplié par A de (54) multiplié par A', et qu'on tienne compte de (42), il vient, en divisant par Γ,

$$(56)\qquad CA' - AC' + AA' = 0.$$

7. Pour former rapidement d'autres syzygies entre les invariants, imaginons que, par une substitution convenable, on ait pris pour nouvel y la forme linéaire u', de telle sorte que u'_0 devienne nul. Les nouvelles valeurs des autres péninvariants seront données en fonction de u_0 et des invariants par les syzygies (45), (46), (47), (48), en y faisant $u = 0$, $u' = 0$; savoir :

$$(57)\quad \begin{cases} \pi_0 = -\dfrac{Bu_0}{\Lambda}, \quad \pi'_0 = -\dfrac{B'u_0}{\Lambda}, \quad \pi''_0 = -\dfrac{Cu_0}{\Lambda}, \quad \pi'''_0 = -\dfrac{C'u_0}{\Lambda}; \\ p_0 = -\dfrac{\Lambda' u_0}{\Lambda}, \quad p'_0 = -\dfrac{2\Gamma' u_0}{\Lambda}, \quad v_0 = \dfrac{Cu_0^2}{\Lambda^2}, \quad v'_0 = \dfrac{C'u_0^2}{\Lambda^2}, \quad \sigma_0 = \dfrac{\Gamma' u_0^2}{\Lambda^2}. \end{cases}$$

Mais toutes les syzygies trouvées ne doivent pas cesser d'être satisfaites quand on y remplace les covariants par les péninvariants correspondants, quelles que soient les valeurs particulières que prennent ces péninvariants suivant la substitution employée. En reportant les valeurs (57) dans chacune des syzygies obtenues entre covariants, on aura donc des syzygies entre invariants.

En opérant de cette manière sur les syzygies (5), (6), (7), (8), (9), (10), on retrouve des syzygies connues (49), (50), (51), (44), (56) et (42). Les syzygies (12), (13), (15) et (16) donnent quatre relations nouvelles, savoir :

$$(58)\qquad A\Lambda' - 2B\Gamma + (2A'D - AI)\Lambda = 0,$$
$$(59)\qquad A'\Lambda' - 2B'\Gamma + (A'I - 2AD')\Lambda = 0,$$
$$(60)\qquad C\Lambda' - 2B\Gamma' + (CI - 2C'D)\Lambda = 0,$$
$$(61)\qquad C'\Lambda' - 2B'\Gamma' + (2CD' - C'I)\Lambda = 0,$$

qui, d'ailleurs, se correspondent entre elles par la permutation des coefficients de u et de u' ou de ceux de v et de v'.

La syzygie (17) donne la suivante, analogue de (14),

$$(62)\qquad \Gamma'^2 = ICC' - C^2D' - C'^2D.$$

La syzygie (18) donne, en tenant compte de (52), la relation nouvelle

$$(63)\qquad \Gamma\Gamma' = IBB' - B^2D' - B'^2D.$$

Les syzygies (20) et (21) donnent également deux relations nouvelles, savoir :

$$(64)\qquad A\Gamma' - C\Gamma + (2B'D - IB\ )\Lambda = 0,$$
$$(65)\qquad A'\Gamma' - C'\Gamma + (IB'\ - 2BD')\Lambda = 0.$$

Les syzygies (22) et (23) donnent encore les deux relations nouvelles

$$(66)\qquad \Gamma'\Lambda' = I(BC' + CB') - 2(BCD' + B'C'D),$$
$$(67)\qquad \Gamma\Lambda' = I(BA' + AB') - 2(ABD' + A'B'D),$$

qui se déduisent l'une de l'autre, en permutant les coefficients de u et de u'.

La syzygie (23 *bis*) ramène à (52); de même les suivantes conduisent à des identités ou à des relations déjà connues.

8. En résumé, le système que nous venons d'étudier comprend en tout vingt-quatre formes, dont les degrés, par rapport aux coefficients des quatre formes fondamentales u, v, v', u', sont indiqués dans le Tableau ci-dessous :

3 covariants quadratiques...	2 droits.....	v........	0	1	0	0
		v'........	0	0	1	0
	1 gauche....	σ........	0	1	1	0
8 covariants linéaires.......	4 droits.....	u........	1	0	0	0
		u'.......	0	0	0	1
		p........	1	1	1	0
		p'........	0	1	1	1
	4 gauches...	π	1	1	0	0
		π'	1	0	1	0
		π''.......	0	1	0	1
		π'''.......	0	0	1	1
13 invariants...............	9 droits.....	A.......	2	1	0	0
		A'.......	2	0	1	0
		B.......	1	1	0	1
		B'.......	1	0	1	1
		C........	0	1	0	2
		C'.......	0	0	1	2
		D.......	0	2	0	0
		D'.......	0	0	2	0
		I........	0	1	1	0
	4 gauches...	Γ........	2	1	1	0
		Γ'.......	0	1	1	2
		Λ........	1	0	0	1
		Λ'.......	1	1	1	1

Les expressions de ces 13 invariants en fonction des coefficients des formes indépendantes sont les suivantes :

$$
(68)\quad \begin{cases}
A = a_1^2 b_0 - 2a_0 a_1 b_1 + a_0^2 b_2, \qquad C = a_1'^2 b_0 - 2a_0' a_1' b_1 + a_0'^2 b_2, \\
A' = a_1^2 b_0' - 2a_0 a_1 b_1' + a_0^2 b_2', \qquad C' = a_1'^2 b_0' - 2a_0' a_1' b_1' + a_0'^2 b_2', \\
B = a_1 a_1' b_0 - (a_0 a_1' + a_1 a_0') b_1 + a_0 a_0' b_2, \\
B' = a_1 a_1' b_0' - (a_0 a_1' + a_1 a_0') b_1' + a_0 a_0' b_2', \\
D = b_0 b_2 - b_1^2, \qquad I = b_0 b_2' - 2b_1 b_1' + b_2 b_0', \qquad D' = b_0' b_2' - b_1'^2, \\
\Gamma = a_0^2 (b_1 b_2' - b_2 b_1') + a_0 a_1 (b_2 b_0' - b_0 b_2') + a_1^2 (b_0 b_1' - b_1 b_0'), \\
\Gamma' = a_0'^2 (b_1 b_2' - b_2 b_1') + a_0' a_1' (b_2 b_0' - b_0 b_2') + a_1'^2 (b_0 b_1' - b_1 b_0'), \\
\Lambda = a_0 a_1' - a_1 a_0', \\
\Lambda' = 2a_0 a_0' (b_1 b_2' - b_2 b_1') + (a_0 a_1' + a_1 a_0')(b_2 b_0' - b_0 b_2') \\
\qquad + 2a_1 a_1' (b_0 b_1' - b_1 b_0'),
\end{cases}
$$

Enfin les vingt syzygies qui relient ces 13 invariants se partagent en 3 groupes, savoir :

9 peuvent être considérées comme exprimant les carrés et les produits deux à deux des invariants gauches (à l'exception du seul carré Λ^2) en fonction des invariants droits ; savoir :

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2 &= AA'I - A^2 D' - A'^2 D, \\
\Gamma'^2 &= CC'I - C^2 D' - C'^2 D, \\
\Lambda'^2 &= I(AC' + CA' + 2BB') - 4(A'C'D + B^2 D'), \\
\Gamma\Gamma' &= BB'I - B^2 D' - B'^2 D, \\
\Gamma\Lambda &= AB' - BA', \\
\Gamma'\Lambda &= BC' - B'C, \\
\Gamma\Lambda' &= I(BA' + AB') - 2(ABD' + A'B'D), \\
\Gamma'\Lambda' &= I(BC' + CB') - 2(BCD' + B'C'D), \\
\Lambda\Lambda' &= AC' - CA'.
\end{aligned}
$$

Trois autres syzygies expriment en fonction des invariants droits les produits de Λ^2 par D, D′, I :

$$
D\Lambda^2 = AC - B^2, \qquad D'\Lambda^2 = A'C' - B'^2,
$$
$$
I\Lambda^2 = AC' + CA' - 2BB'.
$$

Les huit dernières sont des syzygies gauches, c'est-à-dire dans chaque terme desquelles entre un invariant gauche et un seul :

$$
A\Gamma' + C\Gamma - B\Lambda' = 0, \qquad A'\Gamma' + C'\Gamma - B'\Lambda' = 0,
$$
$$
A\Gamma' - C\Gamma + (2B'D - BI)\Lambda = 0, \qquad A'\Gamma' - C'\Gamma + (B'I - 2BD')\Lambda = 0,
$$
$$
\begin{aligned}
A\Lambda' - 2B\Gamma + (2A'D - AI)\Lambda &= 0, \\
A'\Lambda' - 2B'\Gamma + (A'I - 2AD')\Lambda &= 0, \\
C\Lambda' - 2B\Gamma' + (CI - 2C'D)\Lambda &= 0, \\
C'\Lambda' - 2B'\Gamma' + (2CD' - C'I)\Lambda &= 0.
\end{aligned}
$$

9. Pour terminer, je vais appliquer les résultats obtenus ci-dessus à la solution de la question suivante, solution qui sera immédiatement utilisable dans le domaine ternaire :

Étant données les mêmes quatre formes u, u', v, v' que ci-dessus, exprimer en fonction de leurs 13 *invariants les* 6 *invariants que possède le système des trois formes composées*

$$(69)\qquad \left\{\begin{aligned} (u) &= ku' - k'u, \\ (v) &= kv - u^2, \\ (v') &= k^2 v' - 2kuu' + k'u^2, \end{aligned}\right.$$

considérées comme formes fondamentales; k, k' étant deux arbitraires.

Les 6 invariants à calculer sont : les discriminants de (v) et (v'); et leur invariant commun; je les désignerai par (D), (D′), (I); puis le résultant de (u) et (v), celui de (u) et (v'), celui de (u) et du jacobien de (u) et (v); je les désignerai par (A), (A′), (Γ), par analogie avec les notations employées ci-dessus.

Exprimons d'abord (u), (v) et (v') en fonction de x, y et des péninvariants du système des formes u, u', v, v', au moyen des équations (2). Il vient

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned} (u) &= (ku'_0 - k'u_0)x + k\Lambda y, \\ (v) &= (kv_0 - u_0^2)x^2 + 2k\pi_0 xy + k\mathrm{A}y^2, \\ (v') &= (k^2 v'_0 - 2ku_0 u'_0 + k' u_0^2)x^2 + 2k(k\pi'_0 - \Lambda u_0)xy + k^2\mathrm{A}'y^2. \end{aligned}\right.$$

Nous n'avons, pour obtenir (A), (A′), (D), D′), (I), (Γ), qu'à faire dans celles des expressions (68) qui donnent A, A′, D, D′, I, Γ,

$$a_0 = ku'_0 - k'u_0, \qquad a_1 = k\Lambda,$$

$$b_0 = kv_0 - u_0^2, \qquad b_1 = k\pi_0, \qquad b_2 = k\mathrm{A},$$

$$b'_0 = k^2 v'_0 - 2ku_0 u'_0 + k' u_0^2, \qquad b'_1 = k(k\pi'_0 - \Lambda u_0), \qquad b'_2 = k^2\mathrm{A}'.$$

Mais de plus, puisqu'il s'agit de calculer des invariants, rien n'empêche de supposer qu'on ait préalablement pris u' pour nouvel y, ce qui donne aux péninvariants u'_0, v_0, v'_0, π_0, π'_0 les valeurs (57); et en remplaçant u_0, qui figurerait en facteur commun, par l'unité, on en conclut qu'il suffit de faire dans les expressions (68)

$$(71)\quad \begin{cases} a_0 = -k', \quad a_1 = k\Lambda, \\ b_0 = \dfrac{kC - \Lambda^2}{\Lambda^2}, \quad b_1 = -\dfrac{kB}{\Lambda}, \quad b_2 = kA, \\ b'_0 = \dfrac{k^2C' + k'\Lambda^2}{\Lambda^2}, \quad b'_1 = -k\dfrac{kB' + \Lambda^2}{\Lambda}, \quad b'_2 = k^2A'. \end{cases}$$

On trouve ainsi successivement, en utilisant les syzygies entre invariants données plus haut,

$$(72)\quad \begin{cases} (A) = k\,[k^2C - 2kk'B + k'^2A - k\Lambda^2], \\ (A') = k^2[k^2C' - 2kk'B' + k'^2A' - k'\Lambda^2], \\ (D) = k[kD - A], \\ (I) = k\,[k^2I - k(A' + 2B) + k'A], \\ (D') = k^2[k^2D' - 2kB' + k'A' - \Lambda^2], \\ (\Gamma) = k^3[k^2\Gamma' - kk'\Lambda' + k'^2\Gamma + k(B' - C)\Lambda + k'(B - A')\Lambda + \Lambda^3]. \end{cases}$$

Telles sont les expressions demandées.