BULLETIN DE LA S. M. F.

DELANNOY

Sur la durée du jeu

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 124-128
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__124_1>

Sur la durée du jeu; par M. Delannoy.

(Séance du 7 mars 1888.)

Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 23 janvier 1888 (p. 253), M. Rouché a donné la solution du problème suivant :

Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre avec des probabilités égales. Ils possèdent chacun n francs avant d'entrer au jeu; à chaque partie le perdant donne un franc au gagnant, et le jeu ne cesse que lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité P *pour que le jeu se termine juste à la fin d'une partie de rang assigné?*

M. Rouché arrive, à l'aide de longs calculs, à la valeur

$$P = \frac{1+(-1)^{\mu-n}}{2n}\left[\sin\frac{\pi}{n}\cos^{\mu-2}\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{3\pi}{n}\cos^{\mu-2}\frac{3\pi}{2n} + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{r-1}\sin\frac{(2r-1)\pi}{n}\cos^{\mu-2}\frac{(2r-1)\pi}{2n}\right].$$

Reconnaissant que cette formule ne se prête pas aisément au calcul numérique, il en donne une transformation, dans les *Comptes rendus* du 30 janvier :

$$P = \frac{1+(-1)^{\mu-n}}{2^{\mu}}\,\frac{n\,\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\frac{\mu-n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}+1\right)},$$

Cette valeur ne nous paraît pas exacte; l'emploi de l'échiquier nous en fournit une différente.

Soit μ le rang assigné à la partie finale. Pour que l'un des joueurs soit décavé après cette $\mu^{\text{ième}}$ partie, et pas avant, il faut et il suffit:

1° Que, pendant le cours des $\mu - 1$ premières parties, la différence entre les pertes et les gains de l'un ou l'autre joueur n'ait jamais dépassé $n - 1$. Nous obtiendrons tout à l'heure, au moyen de l'échiquier, la probabilité P_1 pour que cette condition soit satisfaite;

2° Que, après les $\mu - 1$ premières parties, la différence entre les pertes et les gains de l'un des deux joueurs soit égale à $n - 1$. La probabilité P_2 pour qu'il en soit ainsi est égale à $\frac{2C_{\mu-1}^{\frac{\mu-n}{2}}}{2^{\mu-1}}$. Remarquons, en passant, que, $\frac{\mu - n}{2}$ devant être un nombre entier, le problème n'est possible que si μ et n sont de même parité. Nous pourrons donc poser

$$\mu + n = 2p, \qquad \mu - n = 2q,$$

et nous aurons alors

$$P_2 = \frac{C_{p+q-1}^{q}}{2^{p+q-2}};$$

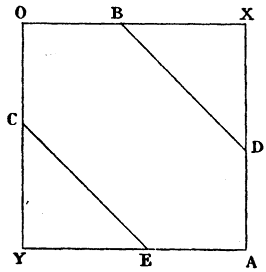
3° Il faut enfin que la dernière partie soit perdue par le joueur qui en a déjà perdu $n - 1$ de plus qu'il n'en a gagné. La probabilité pour qu'il en soit ainsi est

$$P_3 = \tfrac{1}{2}.$$

Il nous reste à déterminer la valeur de P_1.

Soient x le nombre des pertes d'un joueur, et y le nombre de ses gains. Représentons les pertes par des pas horizontaux sur un échiquier et les gains par des pas verticaux. Le nombre des arrangements des x et des y, tels que la différence des pertes et des gains (abstraction faite du signe) ne dépasse pas $n - 1$, est égal au nombre de manières dont une tour, marchant seulement dans les sens $\rightarrow$ et $\downarrow$, peut se rendre de l'origine O sur une case x, y de l'échiquier OBDAEC, déterminé en prenant, sur les axes OX et OY, deux points B et C, dont les distances à l'origine soient égales à $n - 1$ pas, et en menant par ces points des parallèles à la diagonale OA.

Désignons respectivement par $H_{x,y}$, $R_{x,y}$ et $Q_{x,y}$ le nombre de manières dont la tour peut aller du point O sur une case x, y de l'échiquier hexagonal OBDAEC, de l'échiquier pentagonal OBDAY et de l'échiquier carré OXAY. La probabilité P_1 est égale à $\frac{H_{x,y}}{Q_{x,y}}$.



Il est facile de démontrer (1) que

$$R_{x,y} = Q_{x,y} - Q_{x-n,y+n}.$$

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned}H_{x,y} = R_{x,y} - R_{y-n,x+n} + R_{x-2n,y+2n} - R_{y-3n,x+3n} + \ldots \\ - R_{y-(2h-1)n,x+(2h-1)n} + R_{x-2hn,y+2hn},\end{aligned}$$

$(2h-1)n$ et $2hn$ désignant les plus grands multiples de n qui ne rendent pas les indices négatifs.

Par suite on a

$$\begin{aligned}H_{x,y} = Q_{x,y} - Q_{x-n,y+n} - Q_{y-n,x+n} + Q_{y-2n,x+2n} + \ldots \\ - Q_{y-(2h-1)n,x+(2h-1)n} + Q_{x-2hn,y+2hn}\end{aligned}$$

ou bien encore

$$H_{x,y} = C_{x+y}^{y} - C_{x+y}^{x-n} - C_{x+y}^{y-n} + C_{x+y}^{x-2n} + \ldots - C_{x+y}^{y-(2h-1)n} + C_{x+y}^{x-2hn},$$

car on sait que $Q_{x,y}$ est égal au nombre des combinaisons de $x+y$ lettres prises x à x ou y à y.

Pour les cases de l'échiquier hexagonal dont les coordonnées satisfont aux relations

$$(a) \qquad x+y = \mu - 1 = p+q-1, \qquad x-y = n-1 = p-q-1,$$

(1) La démonstration est analogue à celle que nous avons donnée pour l'échiquier triangulaire, dans une Note sur l'emploi de l'échiquier pour la solution de problèmes arithmétiques, Note qui a été publiée dans les *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (Congrès de Nancy, 1886).

on a

$$C_{x+y}^{x-kn} = C_{x+y}^{y-(k-1)n-1};$$

on peut donc écrire

$$H_{x,y} = C_{x+y}^{y} - C_{x+y}^{y-1} - C_{x+y}^{y-n} + C_{x+y}^{y-n-1} + \ldots - C_{x+y}^{y-(2h-1)n} + C_{(x+y}^{y-2h-1)n-1}$$

ou bien, en remplaçant x et y par leurs valeurs tirées des relations (a),

$$H_{x,y} = \frac{n}{p} C_{\mu-1}^{q} - \frac{3n}{p+n} C_{\mu-1}^{q-n} + \ldots + (-1)^{\lambda} \frac{(2\lambda+1)n}{p+\lambda n} C_{\mu-1}^{q-\lambda n},$$

λn étant le plus grand multiple de n contenu dans q.

Par suite,

$$P_1 = \frac{n}{C_{\mu-1}^{q}} \left[\frac{1}{p} C_{\mu-1}^{q} - \frac{3}{p+n} C_{\mu-1}^{q-n} + \ldots + (-1)^{\lambda} \frac{(2\lambda+1)}{p+\lambda n} C_{\mu-1}^{q-\lambda n} \right].$$

La probabilité cherchée P est égale au produit $P_1 P_2 P_3$; on a donc

$$P = \frac{n}{2^{\mu-1}} \left[\frac{1}{p} C_{\mu-1}^{q} - \frac{3}{p+n} C_{\mu-1}^{q-n} + \ldots + (-1)^{\lambda} \frac{(2\lambda+1)}{p+\lambda n} C_{\mu-1}^{q-\lambda n} \right]$$

La valeur de P donnée par M. Rouché se réduit au premier terme de notre formule. Elle correspond donc à la marche de la tour sur l'échiquier pentagonal. Cette marche assure bien la condition que les pertes de l'un des joueurs ne surpassent pas ses gains de plus de $n-1$; mais elle permet à ses gains de surpasser ses pertes d'une quantité plus grande. Cela ne doit pas avoir lieu d'après l'énoncé du problème, car alors l'autre joueur serait décavé. A l'échiquier pentagonal il faut donc substituer l'échiquier hexagonal qui assure que la différence entre les gains et les pertes, abstraction faite du signe, ne dépasse jamais $n-1$. On arrive alors à notre formule.

Il nous paraît probable que M. Rouché n'a pas tenu compte, dans ses calculs, de cette condition que non seulement les pertes d'un joueur ne doivent pas dépasser les gains de plus de $n-1$, mais aussi qu'il doit en être de même pour l'excès de ses gains sur ses pertes.

La valeur assignée à P par M. Rouché correspondrait au cas où l'on permettrait au joueur, qui serait décavé le premier avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie, de reconstituer indéfiniment sa mise.

Notre solution présente un des exemples les plus frappants que nous connaissions de l'utilité de l'échiquier pour simplifier la solution de certains problèmes. L'application de ce procédé nous a permis de trouver, presque sans calculs, la valeur de P, tandis que les méthodes ordinaires ne la fournissaient qu'au moyen de calculs aussi longs que compliqués.

Cette question de la durée du jeu a été traitée par Huygens, Moivre, Laplace, Lagrange, Ampère et par M. Joseph Bertrand sous la forme suivante :

Un joueur expose à un jeu de hasard la $n^{\text{ième}}$ partie de sa fortune et renouvelle l'épreuve indéfiniment. Quelle est la probabilité pour qu'il se ruine et que la $(2\mu + n)^{\text{ième}}$ partie jouée lui enlève son dernier écu?

Ce problème est plus simple que celui que nous avons traité. La solution serait donnée immédiatement par la marche de la tour sur l'échiquier pentagonal. La probabilité cherchée serait

$$\frac{\frac{n}{\mu+n} C^{\mu}_{2\mu+n-1}}{C^{\mu}_{2\mu+n-1}} \frac{C^{\mu}_{2\mu+n-1}}{2^{2\mu+n-1}} \frac{1}{2} = \frac{n}{\mu+n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu+n} \frac{(2\mu+n-1)!}{\mu!(\mu+n)!}$$
$$= \frac{n}{2\mu+n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu+n} \frac{(2\mu+n)!}{\mu!(\mu+n)!}.$$

Elle est égale au premier terme de notre formule divisé par 2. Il était facile de prévoir qu'il devait en être ainsi, puisque dans ce cas on détermine à l'avance le joueur qui doit être ruiné après la $(2\mu + n)^{\text{ième}}$ partie, et pas avant.