BULLETIN DE LA S. M. F.

J. RÉVEILLE

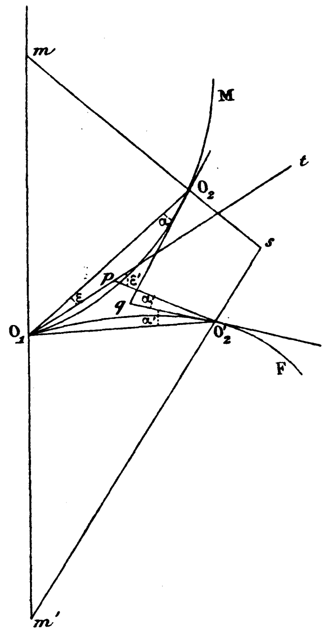
Note sur un théorème de géométrie cinématique

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 130-132
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__130_0>

Note sur un théorème de Géométrie cinématique;
par M. J. Réveille.

(Séance du 7 mars 1888.)

La courbe M roule sur la courbe F en entraînant son plan. Prenons sur M un point O_2 infiniment voisin de O_1 et joignons tous les points d'une conique C passant par les points O_1 et O_2 à ces deux mêmes points; nous avons ainsi deux faisceaux homographiques dont les sommets sont O_1 et O_2.



Après un déplacement infiniment petit de la courbe M, le point O_2 vient en O'_2 sur la courbe F et devient le centre instantané de rotation. Le faisceau de droites, dont le sommet est en O'_2, est maintenant l'ensemble des normales aux trajectoires des points de la conique C. Les points de rencontre des droites du faisceau O'_2 et du faisceau O_1 sont alors les centres de courbure des trajectoires décrites par les points de la conique C, et, comme ces faisceaux sont restés homographiques, ces centres de courbure sont sur une conique passant par les points O_1 et O'_2.

Le faisceau O'_2 est égal au faisceau O_2; donc les rayons de ces deux faisceaux, qui sont homologues d'un même rayon du faisceau O_1, font, avec les tangentes respectives en O_2 et O'_2 aux courbes M et F, des angles égaux.

Soit $O_1 t$ la tangente à la conique C au point O_1; considérons-la comme un rayon du faisceau O_1; le rayon homologue du faisceau O_2 est évidemment $O_2 O_1$, et, par suite, le rayon homologue du faisceau O'_2, c'est-à-dire $O'_2 p$, forme, avec la tangente $O'_2 q$, un angle égal à l'angle $\widehat{O_1 O_2 q}$. Le point p est donc un point de la conique C'.

Appelons

ds la longueur commune des arcs $O_1 O_2$ et $O_1 O'_2$ des courbes M, F, C et C';

R_M, R_F, R et R' les rayons de courbure de ces courbes au point O_1;

α l'angle $O_1 O_2 q$ ou $\frac{ds}{2R_M}$;

α' l'angle $O_1 O'_2 q$ ou $\frac{ds}{2R_F}$;

ε l'angle $O_2 O_1 t$ ou $\frac{ds}{2R}$;

ε' l'angle $tp O'_2$ ou $\frac{ds}{2R'}$.

Dans le triangle $p O'_2 O_1$, l'angle O'_2 est égal à $\alpha + \alpha'$, l'angle O_1 est égal à $\alpha + \alpha' - \varepsilon$, et l'on a la relation

$$\varepsilon' = (\alpha + \alpha') + (\alpha + \alpha' - \varepsilon) = 2(\alpha + \alpha') - \varepsilon$$

ou encore

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R} = 2\left(\frac{1}{R_M} + \frac{1}{R_F}\right). \tag{1}$$

Les faisceaux O_2 et O'_2 étant égaux, l'intersection s de deux rayons homologues est sur une circonférence passant par les points O_2, q et O'_2; donc les points m et m' ne peuvent se confondre que sur cette circonférence. A la limite cette circonférence, dont le rayon deviendra nul, passera par les quatre points d'intersection des coniques C et C', *qui auront alors leurs axes parallèles.*

La conique C peut être remplacée par un système formé d'une droite quelconque D et de la tangente au point O_1 à la courbe M. La courbure de la conique, en ce point, est alors nulle, et la relation (1) devient

$$\frac{1}{R'} = 2\left(\frac{1}{R_M} + \frac{1}{R_F}\right). \tag{2}$$

Si la droite D passe à l'infini dans le plan, la conique C', qui lui correspond, la coupe alors aux points cycliques du plan et devient le cercle I, dont le rayon est donné par la relation (2) et qui contient les centres de courbure des lignes décrites simultanément par les points de l'infini.

On peut donc énoncer le théorème de Rivals :

Le lieu des centres de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite D *est une conique.*

Et l'on peut ajouter :

Les coniques C' *correspondant à toutes les droites* D *du plan ont pour cercle osculateur commun au point* O_1 *la circonférence* I.

D'ailleurs, les axes de la conique C' sont parallèles aux bissectrices des angles formés par la droite D et la tangente au point O_1 à la courbe M.