BULLETIN DE LA S. M. F.

V. JAMET

Sur le genre des courbes planes triangulaires

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 132-135
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__132_1>

Sur le genre des courbes planes triangulaires; par M. V. Jamet.

(Séance du 21 mars 1888.)

M. Halphen, à qui l'on doit d'importantes recherches sur le genre des courbes planes algébriques, a signalé, dans les Notes qu'il a ajoutées au *Traité des courbes planes* de Salmon, une catégorie de courbes planes dont il est facile de déterminer le genre. Ce sont les courbes définies, en coordonnées polaires, par l'équation

$$r^k = \cos k\theta, \tag{1}$$

où k désigne un nombre commensurable, précédé du signe $+$ ou du signe —. Ces courbes s'obtiennent en transformant, par voie d'homographie, les courbes que de la Gournerie avait étudiées en 1865-1866, sous le nom de *courbes triangulaires*. Celles-ci sont représentées, en coordonnées homogènes, par l'équation

$$X^h + Y^h + Z^h = 0, \tag{2}$$

h désignant un nombre commensurable, positif ou négatif. Si l'on y fait

$$\frac{X}{Z} = \frac{x+yi}{a} = \frac{r}{a}(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$\frac{Y}{Z} = \frac{x-yi}{a} = \frac{r}{a}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Cette équation devient

$$2r^h\cos k\theta + a^h = 0$$

ou

$$r^{-h} = -\frac{a^{-h}}{2}\cos(-h\theta),$$

et, si l'on suppose $-\frac{a^{-h}}{2} = 1$, $h = -k$, on retrouve l'équation (1). M. Halphen a montré que le genre des courbes précitées ne dépend que du numérateur de la fraction k; peut-être n'est-il pas sans intérêt de montrer comment toute courbe triangulaire correspond, point par point, à une autre courbe triangulaire, dépourvue de points multiples, et dont l'exposant est égal au numérateur de l'exposant de la courbe donnée ([1]).

Soient

$$\frac{X}{Z} = x, \quad \frac{Y}{Z} = y, \quad h = \pm\frac{p}{q};$$

on peut supposer que les lettres p, q désignent des nombres entiers premiers entre eux, et l'équation (2) deviendra

$$x^{\pm\frac{p}{q}} + y^{\pm\frac{p}{q}} + 1 = 0. \tag{3}$$

Posons

$$x = u^{\pm q}, \qquad y = u^{\pm p},$$

nous trouverons

$$u^p + v^p + 1 = 0. \tag{4}$$

([1]) D'après les dénominations adoptées par de la Gournerie, le nombre h est l'exposant de la courbe (2).

Si, dans cette dernière équation, u, v désignent les coordonnées cartésiennes d'un point, mobile sur une courbe, on voit qu'à chaque point (u, v) pris sur la courbe (4) correspond un point (x, y) de la courbe (3). Je dis que, réciproquement, à chaque point (x, y) de la courbe (3) correspond un point (u, v) de la courbe (4), et un seul; en d'autres termes, que si les variables u, v vérifient l'équation (4), on peut regarder chacune d'elles comme une fonction rationnelle des variables x, y qui entrent dans les formules de transformation.

Supposons d'abord l'exposant de la courbe donnée positif et écrivons l'équation (4) sous la forme

$$-u^p = 1 + v^p,$$

puis élevons les deux membres de cette nouvelle équation à la puissance q; nous trouvons, en tenant compte des formules de transformation,

$$(-1)^q x^p = 1 + q v^p + \frac{q(q-1)}{1.2} v^{2p} + \ldots + q v^{(q-1)p} + y^p.$$

Pour abréger, écrivons cette équation sous la forme

$$(5) \qquad A_0 + A_1 v^p + A_2 v^{2p} + \ldots + A_{q-1} v^{(q-1)p} = 0.$$

A_0 désigne une fonction entière de x et de y, de degré p; A_1, A_2, A_3, ..., A_{q-1} sont des coefficients numériques. En multipliant le premier membre de cette équation par v^p et tenant compte de la condition $y = v^q$, on trouvera successivement

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} A_{q-1} y + A_0 v^p + A_2 v^{2p} + \ldots + A_{q-2} v^{(q-1)p} = 0, \\ A_{q-2} y + A_{q-1} y, v^p + A_0 v^{2p} + \ldots + A_{q-3} v^{(q-1)p} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_1 y \quad + A_2 y v^p + A_3 y v^{2p} + \ldots + A_0 v^{(u-1)p} = 0. \end{array}\right.$$

Les équations (5) et (6) constituent un système de q équations linéaires par rapport aux $q-1$ paramètres v^p, v^{2p}, v^{3p}, ..., $v^{(q-1)p}$. Soit Δ le déterminant de tous leurs coefficients; ce polynôme est, par rapport à x, y, de degré pq, et l'équation $\Delta = 0$ n'est autre que l'équation (3), mise sous forme rationnelle; car, d'après de la Gournerie, cette équation doit être du degré pq. Il s'ensuit que, si, dans l'un quelconque des mineurs du premier ordre de Δ, on considère x, y comme les coordonnées d'un point pris au hasard sur la courbe (3), ce mineur n'est pas nul; car, s'il était toujours nul, il y aurait, entre les coordonnées d'un point pris arbitrairement sur cette courbe, une relation de degré moindre que pq, ce qui est absurde. Donc il est possible de résoudre, par rapport à v^p, v^{2p}, v^{3p}, ..., $v^{(q-3)p}$, le système des équations (6). On trouve ainsi des fonctions rationnelles de x et de y. Mais, parmi les nombres p, $2p$, $3p$, ..., $(q-1)p$, il en est un qui, divisé par q, donne pour reste 1. Soit kp ce nombre, et soit

$$kp = aq + 1.$$

D'après ce qui précède,

$$v^{kp} = f(x, y),$$

f désignant une fonction rationnelle. On en déduit

$$v^{aq+1} = y^a . v = f(x, y),$$

d'où

$$v = \frac{f(x, y)}{y^a},$$

ce qui démontre l'énoncé.

Si l'exposant de la triangulaire considérée est négatif, on observera qu'elle correspond, point par point, à une triangulaire d'exposant égal et de signe contraire, et que celle-ci correspond, point par point, à une courbe telle que la courbe (4).

On voit, en outre, que celle-ci n'a aucun multiple et que, par conséquent, elle est du genre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$. Donc, enfin, toute triangulaire d'exposant $\pm \frac{p}{q}$ est du genre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$.