BULLETIN DE LA S. M. F.

WILLIOT

Note sur le procédé le plus simple de calcul des nombres de Bernoulli

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 144-149
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__144_1>

Note sur le procédé le plus simple de calcul des nombres de Bernoulli; par M. Williot.

(Séance du 6 juin 1888.)

De nombreuses méthodes ont été proposées pour simplifier, autant que possible, le calcul des nombres de Bernoulli; mais il ne semble pas que l'on ait tiré un parti suffisant des remarquables formules de Seidel, généralisées par M. Stern.

M. E. Catalan, en démontrant le théorème de Staudt et Clausen, a signalé comme avantageux [1] l'emploi des nombres entiers

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques,* 2e série, T. IV (mars 1880).

et impairs P_n, déterminés par la formule

$$P_{2n} = 2(2^{2n} - 1)B_{2n};$$

mais les formules complexes qui lui servent au calcul de P_{2n} sont un obstacle à l'application de cette méthode. Déjà M. Édouard Lucas, après avoir démontré la seconde formule de Seidel (¹),

$$(a) \quad (2^{2n} - 1)B_{2n} + n_2(2^{2n-2} - 1)B_{2n-2} + n_4(2^{2n-4} - 1)B_{2n-4} + \ldots = 0,$$

remarque que cette formule équivaut à l'expression symbolique

$$P^n(P+1)^n = 0,$$

où les exposants doivent être transformés en indices après le développement.

Si l'on transforme, à l'aide de cette équation, les P_{2n} en déterminants, on constitue le Tableau suivant, formé très simplement au moyen des coefficients binomiaux :

$$
\begin{array}{r}
n = 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8\\ 9\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \\
\end{array}
\quad P_{2n} = \left|\begin{array}{ccccccccccc}
3 & 1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»}\\
1 & 6 & 1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»}\\
\text{»} & 5 & 10 & 1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»}\\
\text{»} & 1 & 15 & 15 & 1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»}\\
\text{»} & \text{»} & 7 & 35 & 21 & 1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»}\\
\text{»} & \text{»} & 1 & 28 & 70 & 28 & 1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»}\\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & 9 & 84 & 126 & 36 & 1 & \text{»} & \text{»} & \text{»}\\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & 1 & 45 & 210 & 210 & 45 & 1 & \text{»} & \text{»}\\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & 11 & 165 & 462 & 330 & 55 & 1 & \text{»}\\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & 1 & 66 & 495 & 924 & 495 & 66 & 1\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right| = \left|\begin{array}{rcccccccc}
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
-17 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
+155 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
-2073 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
+38227 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
-929569 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
+28620619 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & 1\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right.
$$

La réduction très facile de ce déterminant nous donne aisément dans la première colonne, en dehors de $P_2 = 1$, $P_4 = 2$, $P_6 = 3$, $P_8 = 17$, $P_{10} = 155$, ...

La simplification résultant de l'emploi de la formule (a) de M. Seidel est donc considérable; mais les nombres P_{2n} ont malheureusement une croissance bien plus rapide encore que celle des nombres de Bernoulli, et nous croyons plus avantageux d'avoir recours à l'autre formule de M. Seidel, en la transformant d'une façon analogue.

Cette formule

$$B^{n+1}(B+1)^n + B^n(B+1)^{n+1} = 0$$

(¹) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VIII, n° 5 (1880), p. 172.

donne par développement

$$\left(\frac{n}{1}+\frac{n+1}{1}\right)B_{2n}+[n_3+(n+1)_3]B_{2n-2}$$
$$+[n_5+(n+1)_5]B_{2n-4}+\ldots\left\{\begin{matrix} B_n \\ [1+(n+1)]B_{n+1}\end{matrix}\right. = 0,$$

selon que n est pair ou impair.

Or on a, identiquement,

$$n_p+(n+1)_p=(n+1)_p\times\frac{2n-P+2}{n+1}.$$

On peut donc écrire, en faisant ([1])

$$Q_{2n}=(2n+1)B_{2n},$$

$$\left(\frac{n+1}{n+1}\right)_1 Q_{2n}+\left(\frac{n+1}{n=1}\right)_3 Q_{2n-2}+\left(\frac{n+1}{n+1}\right)_5 Q_{2n-4}+\ldots\left\{\begin{matrix}\frac{1}{n+1}\,Q_n \\ \frac{n+1}{n+1}\,Q_{+1n}\end{matrix}\right\}=0,$$

selon que n est pair ou impair. On supprimera le dénominateur commun $(n+1)$, et l'on pourra, en remarquant que les Q d'indice impair sont nuls, écrire symboliquement

$$Q^n(1+Q)^{n+1}=0.$$

En admettant $Q_0=1$, $Q_1=-1$, on peut développer en déterminant cette formule et poser

$$(2n+1)B_{2n}=Q_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\times$$

1	2	»	»	»	»	»	»	»	»	»		...	$n=2$
»	1	3	»	»	»	»	»	»	»	»		...	3
»	»	4	4	»	»	»	»	»	»	»		...	4
»	»	1	10	5	»	»	»	»	»	»		...	5
»	»	»	6	20	6	»	»	»	»	»		...	6
»	»	»	1	21	35	7	»	»	»	»		...	7
»	»	»	»	8	56	56	8	»	»	»		...	8
»	»	»	»	1	36	126	84	9	»	»		...	9
»	»	»	»	»	10	120	252	120	10	»		...	10
»	»	»	»	»	1	55	330	462	165	11		...	11
»	»	»	»	»	»	12	220	792	792	220	12	...	12
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	

([1]) Euler a rencontré la série de ces nombres Q_{2n} dans la sommation de la série

$$\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots=\frac{2^{2n-1}n^{2n}}{1.2.3\ldots(2^n+1)}\,Q_{2n}.$$

La formation de ce déterminant avec les coefficients binomiaux est des plus simples.

Cette simplification est d'ailleurs naturelle, étant donné que, suivant la loi de MM. Standt et Clausen, le dénominateur de B_{2n} ne doit contenir aucun facteur premier compris entre $(n+1)$ et $(2n+1)$.

Le desideratum serait de faire sortir du déterminant tous les facteurs non premiers compris entre 1 et $(2n+1)$; multiplions, par les facteurs non premiers

$$\begin{array}{ccccccccc}
9, & 15, & 21, & 27, & 33, & 39, & 45, & 51, & 57, \\
 & & & 25, & & 35, & & & 55, \\
 & & & & & & 49, & & \\
\multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

les colonnes dont le dernier chiffre est l'unité et correspond au même nombre à l'extrémité de la ligne. Nous pourrons alors diviser respectivement les lignes par 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, et faire sortir des déterminants tous les nombres non premiers qui figurent au dénominateur

$$(2n+1)B_{2n} = Q_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3.5.7.11.17.}\begin{vmatrix}
1 & 1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \dots \\
1 & 10 & 45 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \dots \\
\text{»} & 1 & 30 & 1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \dots \\
\text{»} & 1 & 189 & 35 & 7 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \dots \\
\text{»} & \text{»} & 9 & 7 & 7 & 15 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \dots \\
\text{»} & \text{»} & 1 & 4 & 14 & 140 & 1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \dots \\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & 1 & 12 & 378 & 12 & 1 & \text{»} & \text{»} & \dots \\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & 1 & 55 & 4950 & 462 & 165 & 231 & \text{»} & \dots \\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & 1 & 275 & 66 & 66 & 385 & 1 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{vmatrix}.$$

Nous ne conservons ainsi au dénominateur que les nombres premiers compris entre 1 et $(n+1)$. Mais nous avons à faire disparaître, par la réduction, les facteurs 9, 15, 21, 27, ... que nous avons introduits, et nous profiterons naturellement pour cette élimination de ce que ces facteurs de la forme $(2n+1)$ doivent diviser les déterminants suivant la loi de MM. Standt et Clausen.

La réduction de ces déterminants ne présente d'ailleurs aucune difficulté. Elle conduit aux formes suivantes, dans lesquelles le dénominateur comprend les nombres premiers de 2 à $(n+1)$ et le nombre $(2n+1)$ s'il est premier.

1° De $n = 5$ à $n = 8$:

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)2.3.5} \left| \begin{array}{r|c|c|c|r} 5.5 & 1 & 0 & 0 & n = 5 \\ -691 & 0 & 7 & 0 & 6 \\ 7.5 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ -3617 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right.$$

2° De $n = 9$ à $n = 14$:

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)2.3.5.7.11.13} \left| \begin{array}{l cccc|c|c|c|c|c r} 5.5.7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -\ 691 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 7.5.7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -3617.7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 43867.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & n = 6 \\ -174611.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 854513.5.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11 \\ -236364091 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 12 \\ 8553103.5.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \\ -23749461029.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array} \right.$$

On trouve ainsi

$$B_{22} = \frac{854513.5.7.11}{2.3.5.7.11.23} = \frac{854513}{2.3.23},$$

$$B_{28} = -\frac{23749461029.7.11.13}{2.3.5.7.11.13.29} = \frac{23749461029}{2.3.5.29}$$

3° De $n = 15$ à $n = 17$.

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)2.3.5.7.11.13.17} \left| \begin{array}{r cccccccc r} -3617.7.11 & 1 & & & & & & & & \\ 43867.5.11 & 0 & 1 & & & & & & & \\ -174611.7 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 854513.5.7.11 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ -236364091.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & & & & \\ 8553103.5.7.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ -23749461029.7.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 8615841276005.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & n = 15 \\ -7709321041217.7.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n = 16 \end{array} \right.$$

$$B_{32} = -\frac{7709321041217.7.11.13}{2.3.5.7.11.13.17} = \frac{7709321041217}{2.3.5.17}.$$

Le calcul ne comprend que des multiplications et des additions, et s'effectue aussi rapidement que le permet l'importance des nombres en question.

On trouve ainsi une confirmation de la loi de MM. Standt et Clausen. Nous avons indiqué ici une réduction successive; mais on pourrait également calculer directement un déterminant quelconque, c'est-à-dire un nombre quelconque de Bernoulli.

Nous sommes d'ailleurs arrivé à ces déterminants en réduisant l'expression immédiate du coefficient de la formule d'Euler

$$\Delta F(x) = hF'(x) + A_1 \Delta F'(x) \frac{h}{1}$$
$$+ A_2 \Delta F''(2) h^2 + A_3 \Delta F'''(x) h^3 - \ldots + A_m \Delta F^m(x) h^m + \ldots$$

qui est

$$A_m = \frac{B_m}{1.2..m} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & & 0 \\ \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & & 0 \\ \frac{1}{1.2.3.4} & \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & & 0 \\ \frac{1}{1.2.3.4.5} & \frac{1}{1.2.3.4} & \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & & 0 \\ & & & & & \\ \frac{1}{1.2..m} & \frac{1}{1.2.(m-1)} & \frac{1}{1.2.(n-2)} & \frac{1}{1.2.(n-3)} & & \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1.2.(m+1)} & \frac{1}{1.2.m} & \frac{1}{1.2.(m-1)} & \frac{1}{1.2.(m-2)} & & \frac{1}{1.2} \end{vmatrix}$$

déterminant symétrique formé avec les $(m+1)$ premières fonctions $\frac{1}{\Gamma(P)}$.

Nous ne donnons pas ces calculs, un peu étendus, qui ne font que conduire à la formule de Seidel.