BULLETIN DE LA S. M. F.

DE PRESLE

Dérivées successives d'une puissance entière d'une fonction d'une variable, dérivées successives d'une fonction de fonction et application à la détermination des nombres de Bernoulli

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 157-162
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__157_0>

Dérivées successives d'une puissance entière d'une fonction d'une variable, dérivées successives d'une fonction de fonction et application à la détermination des nombres de Bernoulli; par M. DE PRESLE [1].

(Séance du 4 juillet 1888.)

1. *Rappel de la formule donnant les dérivées successives d'un produit de fonctions d'une variable.* — Soient a, b, c, ..., k n fonctions d'une variable x; on a, d'après une formule connue,

$$(1)\qquad \mathrm{D}_{m^x}(a.b.c\ldots k) = \Sigma\, d.e\ldots g \cdot \frac{m!}{p!\,q!\ldots t!}\,\mathrm{D}_{p^x} a\,\mathrm{D}_{q^x} b\ldots \mathrm{D}_{t^x} k;$$

dans cette formule

$$p + q + \ldots + t = m;$$

d, e, ..., g sont les fonctions dont les dérivées ne figurent pas dans le terme considéré.

2. *Dérivées successives d'une puissance entière d'une fonction d'une variable.* — Supposons les fonctions a, b, c, ..., k identiques entre elles. Soit u leur valeur commune : nous aurons

$$\mathrm{D}_{m^x} u^n = \Sigma j\,\frac{m!}{\Pi(h!)^l}\,u^{n-\Sigma l}\,\Pi\,\mathrm{D}^l_{h^x} u;$$

dans cette formule

$$\Sigma h.l = m,\qquad \Sigma l = 1, 2, \ldots, n,$$

j est un coefficient qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, nous chercherons le nombre des termes qui, dans l'expression de $\mathrm{D}_{m^x}(a.b.c\ldots k)$ deviennent égaux en vertu de la supposition précédente, et, pour plus de clarté, nous supposerons qu'un de ces termes soit, en supprimant l'indice x,

$$\mathrm{D}_5 a.\mathrm{D}_3 b.\mathrm{D}_5 c.\mathrm{D}_2 d.\mathrm{D}_5 e.\,\mathrm{D}_2 f.\mathrm{D} k.$$

---

[1] Pour ne pas multiplier outre mesure les parenthèses, nous désignerons par $\mathrm{D}^b_a xf$ la dérivée d'ordre a par rapport à x de f élevée à la puissance b, que l'on écrit ordinairement $(\mathrm{D}^a_x f)^b$.

Mais on verra immédiatement que la conséquence du raisonnement que nous allons faire est générale.

Écrivons le terme en question

$$D_5 a . D_5 c . D_5 e . D_3 b . D_2 d . D_2 f . D k.$$

Nous devons prendre toutes les combinaisons trois à trois des sept facteurs Da, Db, Dc, Dd, De, Df, Dk et les affecter de l'indice 5, puis multiplier chacune de ces combinaisons par toutes les combinaisons une à une d'un facteur restant affectées de l'indice 3 ; ensuite multiplier par toutes les combinaisons deux à deux de deux facteurs restants affectées de l'indice 2 ; enfin multiplier par le facteur restant ; donc le terme proposé donne un nombre de termes identiques égal à

$$\frac{7.6.5}{1.2.3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3.2}{1.2} \cdot \frac{1}{1},$$

ou à

$$\frac{7!}{3!\,1!\,2!\,1!}.$$

Il est évident que le nombre des termes de $D_{m^x} u^n$ provenant d'une semblable analyse est

$$\frac{(\Sigma l)!}{\Pi(l!)}.$$

Mais ce qui a lieu pour le terme considéré s'applique à tous les termes de même composition d'indices, dont les lettres ne sont pas toutes les mêmes, c'est-à-dire à un nombre de termes égal au nombre des combinaisons de m lettres Σl à Σl ou à

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-\Sigma l+1)}{(\Sigma l)!};$$

donc

$$D_{m^x} u^n = \sum \frac{m(m-1)\ldots(m-\Sigma l+1)}{(\Sigma l)!} \frac{(\Sigma l)!}{\Pi(l!)} \frac{m!}{\Pi(h!)^l} u^{n-\Sigma l} \Pi D_{h^x}^l u,$$

ou

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{m^x} u^n = \sum \dfrac{m(m-1)\ldots(m-\Sigma l+1)}{\Pi(l!)} \dfrac{m!}{\Pi(h!)^l} u^{n-\Sigma l} \Pi D_{h^x}^l u, \\ \qquad \Sigma hl = m, \qquad \Sigma l = 1, 2, \ldots, n. \end{array} \right.$$

3. *Remarque.* — Supposons m égal à n

$$D_{m^x} u^m = \sum \frac{m(m-1)\ldots(m-\Sigma l+1)}{\Pi(l!)} \frac{m!}{\Pi(h!)^l} u^{m-\Sigma l} D_{h^x}^l u,$$

mais

$$D_{\Sigma l^u} u^m = m(m-1)\ldots(m-\Sigma l+1)u^{m-\Sigma l},$$

donc

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} D_{m^x} u^m = \sum \dfrac{m!}{\Pi(l!)\,\Pi(h!)^l}\, D_{\Sigma l^u} u^m\, \Pi\, D^l_{h^x} u, \\ \Sigma hl = m, \qquad \Sigma l = 1, 2, \ldots, m. \end{array}\right.$$

4. *Remarque.* — Il résulte de l'équation (3) que $\dfrac{m!}{\Pi(l!)\,\Pi(h!)^l}$ est un nombre entier; on peut le démontrer directement. Remarquons d'abord qu'en décomposant l'expression précédente en facteurs de la forme $\dfrac{(k+1)(k+2)\ldots(k+hl)}{l!(h!)^l}$, k étant un nombre entier, il suffira de démontrer que ces facteurs sont entiers; en outre, l'un d'eux peut s'écrire $\dfrac{(k+1)(k+2)\ldots(k+hl)}{(hl)!}\times\dfrac{(hl)!}{l!(h!)^l}$. Le premier de ces nouveaux facteurs étant entier, nous nous proposerons de démontrer qu'il en est de même du second.

Nous prendrons un cas particulier, mais il sera évident que la démonstration est générale.

Considérons le quotient

$$\frac{1.2.3\ldots 14.15}{(1.2.3.4.5)^3.1.2.3}.$$

Nous pouvons l'écrire

$$\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4}\cdot\frac{5.1}{5.1}\times\frac{6.7.8.9}{1.2.3.4}\cdot\frac{5.2}{5.2}\times\frac{11.12.13.14}{1.2.3.4}\cdot\frac{5.3}{5.3}.$$

Or les fractions $\dfrac{1.2.3.4}{1.2.3.4}, \dfrac{6.7.8.9}{1.2.3.4}, \dfrac{11.12.13\ 14}{1.2.3.4}$ sont entières; donc le quotient proposé est entier.

5. *Dérivées successives d'une fonction de fonction.* — Considérons une fonction de u, $\varphi(u)$; u étant une fonction de x,

$$\begin{aligned} D_x\varphi &= D_u\varphi\, D_x u, \\ D_{2^x}\varphi &= D_u\varphi\, D_{2^x}u + D_{2^u}\varphi\, D^2_x u, \\ D_{3^x}\varphi &= D_u\varphi\, D_{3^x}u + 3\,D_{2^u}\varphi\, D_x u\, D_{2^x}u + D_{3^u}\varphi\, D^3_x u. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

nous reconnaissons la loi suivante, dont la généralité s'aperçoit immédiatement,

$$D_{m^x}\varphi = A_1 D_u\varphi + A_2 D_{2^u}\varphi + \ldots + A_m D_{m^u}\varphi,$$

les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_m$ étant indépendants de la fonction φ, mais ne dépendant que de la fonction u.

Il en résulte que les coefficients de $D_{m^x} u^m$, que nous avons trouvés (3), sont ceux de $D_{m^x}\varphi$; donc

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} D_{m^x}\varphi = \sum \dfrac{m!}{\Pi(l!)\,\Pi(h!)^l}\, D_{\Sigma l^u}\varphi\, \Pi D^l_{h^x} u, \\ \Sigma hl = m, \qquad \Sigma l = 1, 2, \ldots, m. \end{array}\right.$$

6. *Application.* — Nous allons appliquer cette formule à un cas particulier $D_{7^x}\varphi$; nous formerons des suites de nombre par ordre décroissant avec répétition, telles que la somme des nombres de chaque suite soit 7,

$$\begin{gathered} 7,\ 6.1,\ 5.2,\ 5.1.1,\ 4.3,\ 4.2.1,\ 4.1.1.1, \\ 3.3.1,\ 3.2.2,\ 3.2.1.1,\ 3.1.1.1.1,\ 2.2.2.1,\ 2.2.1.1.1, \\ 2.1.1.1.1.1,\ 1.1.1.1.1.1.1; \end{gathered}$$

nous transformerons ces suites en produits affectés d'exposants

$$\begin{gathered} 7,\ 6.1,\ 5.2,\ 5.1^2,\ 4.3,\ 4.2.1, \\ 4.1^3,\ 3^2.1,\ 3.2^2,\ 3.2.1^2,\ 3.1^4,\ 2^3.1,\ 2^2.1^3,\ 2.1^5,\ 1^7. \end{gathered}$$

Nous formerons des produits de dérivées de u par rapport à x, dont les indices seront les facteurs précédents, et les exposants ceux de ces facteurs, enfin nous multiplierons chaque produit par une dérivée de φ par rapport à u d'indice égal au degré de ce produit et par le coefficient que donne l'équation (4).

Considérons, par exemple, dans la suite précédente le produit 3.2^2; il donne d'abord

$$D_{3^x} u\, D^2_{2^x} u;$$

puis

$$D_{3^u}\varphi\, D_{3^x} u\, D^2_{2^x} u;$$

et enfin

$$\frac{7!}{2!\,3!\,(2!)^2}\, D_3 u\varphi\, D_{3^x} u\, D^2_{2^x} u$$

ou

$$105 . D_{3^u}\varphi\, D_{3^x} u\, D^2_{2^x} u.$$

En faisant un semblable calcul pour tous les termes, nous obtenons pour $D_{7^x}\varphi$ l'expression suivante, dans laquelle nous n'indiquerons pas les quantités par rapport auxquelles les dérivées sont prises, les dérivées de φ étant toujours prises par rapport à u et celles de u par rapport à x

$$\begin{aligned}
&D\varphi\, D_7 u + 7.D_2\varphi\, D_6 u\, Du + 21.D_2\varphi\, D_5 u\, D_2 u + 21.D_3\varphi\, D_5 u\, D^2 u \\
&\quad + 35.D_2\varphi\, D_4 u\, D_3 u + 105.D_3\varphi\, D_4 u\, D_2 u\, Du + 35.D_4\varphi\, D_4 u\, D^3 u \\
&\quad + 70.D_3\varphi\, D_3^2 u\, Du + 105.D_3\varphi\, D_3 u\, D_2^2 u + 210.D_4\varphi\, D_3 u\, D_2 u\, D^2 u \\
&\quad + 35.D_5\varphi\, D_3 u\, D^4 u + 105.D_4\varphi\, D_2^3 u\, Du + 105.D_5\varphi\, D_2^2 u\, D^3 u \\
&\quad + 21.D_6\varphi\, D_2 u\, Du^5 + D_7\varphi\, D^7 u.
\end{aligned}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat en formant successivement les dérivées de φ.

7. *Application aux nombres de Bernoulli.* — L'expression d'un nombre de Bernoulli B_n est la suivante :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
B_n &= (-1)^{n+1}\frac{n}{(2^{2n}-1)\,2^{2n-1}}\, D_{2n^x-1}(\operatorname{tang} x)_0 \\
&= (-1)^{n+1}\frac{n}{(2^{2n}-1)\,2^{2n-1}}\, D_{2n^x-2}(\cos^{-2} x)_0.
\end{aligned}\right.$$

Supposons dans la formule précédente

$$\varphi = u^{-2}, \qquad u = \cos x,$$

nous aurons

$$D_{k^u}\varphi = (-1)^k (k+1)!\, u^{-(k+2)}, \qquad D_{2k^x+1} u = (-1)^k \sin x, \qquad D_{2k^x} u = (-1)^k \cos x,$$
$$D_{k^u}(\varphi)_{x=0} = (-1)^k (k+1)!, \qquad D_{2^x k+1}(u)_0 = 0, \qquad D_{2^x k}(u)_0 = (-1)^k,$$
$$D_{2^x p}(\cos_2^{-2} x)_0 = \sum \frac{(2p)!\,(\Sigma l+1)!}{\Pi(l!)\,\Pi(h!)^l}\,\Pi D_{h^x}^l(u)_0,$$

dans laquelle formule

$$h \text{ pair}, \qquad \Sigma hl = 2p, \qquad \Sigma l = 1, 2, \ldots, p,$$

donc

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1} n}{(2^{2n}-1)\,2^{2n-1}} \sum \frac{(-1)^{\Sigma l}(2n-2)!\,(\Sigma l+1)!}{\Pi(l!)\,\Pi(h!)^l},$$

dans laquelle formule

$$h \text{ pair}, \quad \Sigma hl = 2n-2, \qquad \Sigma l = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

8. *Calcul d'un nombre particulier de Bernoulli.* — Proposons-nous le calcul de B_6

$$B_6 = -\frac{3}{(2^{12}-1)\,2^{10}} \sum \frac{(-1)^{\Sigma l}\, 10!\,(\Sigma l+1)!}{\Pi(l!)\,\Pi(h!)^l};$$

ou

$$B_6 = -\frac{1}{1397760}\sum.$$

On aura d'abord pour Πh^l, les valeurs

$$10,\quad 8.2,\quad 6.4,\quad 6.2^2,\quad 4^2.2,\quad 4.2^3,\quad 2^5,$$

puis pour $\Pi\, l$ les valeurs

$$1,\quad 1.1,\quad 1.1,\quad 1.2,\quad 2.1\quad 1.3,\quad 5.$$

Les valeurs de $\Sigma\, l$ sont

$$1,\quad 2,\quad 2,\quad 3,\quad 3,\quad 4,\quad 5,$$

celles de $\Sigma\, l + 1$ sont

$$2,\quad 3,\quad 3,\quad 4,\quad 4,\quad 5,\quad 6.$$

donc la somme Σ aura pour expression

$$-\frac{10!\,2!}{10!}+\frac{10!\,3!}{8!\,2!}+\frac{10!\,3!}{6!\,4!}-\frac{10!\,4!}{2!\,6!\,(2!)^2}-\frac{10!\,4!}{2!\,(4!)^2\,2!}+\frac{10!\,5!}{3!\,4!\,(2!)^3}-\frac{10!\,6!}{5!\,(2!)^5}.$$

ou

$$-2+270+1260-15120-37800+378000-680400,$$

ou enfin

$$-353792.$$

On obtient ainsi pour B_6 la valeur $\frac{353792}{1397760}$.

Le plus grand commun diviseur des deux termes de B_6 étant 512, on obtient le résultat connu

$$B_6 = \frac{691}{2730}.$$