BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur une propriété des surfaces minima

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 102-104

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__102_1>

Démonstration élémentaire d'un théorème énoncé par M. E. Catalan [1]; par M. Berdellé.

Tout multiple de 8 *est la somme de* 8 *carrés impairs.*

Un multiple effectif de 8 est de la forme

$$8+8n;$$

on sait que l'on peut écrire

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

or

$$a^2 = \frac{a^2-a}{2} + \frac{a^2+a}{2},$$

donc

$$8a^2 = (4a^2 - 4a) + (4a^2 + 4a);$$

d'où l'on conclut facilement

$$\begin{aligned} 8+8n = &+ (1+4a^2-4a) + (1+4a^2+4a) \\ &+ (1+4b^2-4b) + (1+4b^2+4b) \\ &+ (1+4c^2-4c) + (1+4c^2+4c) \\ &+ (1+4d^2-4d) + (1+4d^2+4d), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

On voit de plus que les huit nombres impairs se divisent en couples de deux nombres impairs consécutifs

$$2a-1, \quad 2a+1, \quad \ldots.$$

Toutefois, si k des nombres a, b, c, d sont nuls, il y aura k couples de carrés qui, au lieu d'être les carrés de deux impairs consécutifs, seront tous les deux égaux à 1.

Sur une propriété des surfaces minima; par M. E. Goursat.

Considérons une surface minima S, dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$(1) \qquad ds^2 = \mathrm{R}(du^2 + dv^2),$$

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique,* vol. XVI, p. 129.

tandis que l'élément linéaire de la représentation sphérique a pour expression

$$(2) \qquad d\sigma^2 = \frac{1}{R}(du^2 + dv^2);$$

R désigne le rayon de courbure principal et les lignes de courbure de la surface ont pour équations

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}$$

(voir Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 312). Sur la normale en un point quelconque M_0 de la surface minima portons, de part et d'autre du pied de la normale, deux longueurs égales M_0M_1, M_0M_2, variant d'une manière continue quand on se déplace sur la surface S. Les deux points M_1, M_2 décrivent deux surfaces, S_1, S_2, dont il est aisé d'avoir l'élément linéaire. On aura, par exemple, en désignant par λ la longueur M_0M_1,

$$(3) \qquad \begin{cases} ds_1^2 = \dfrac{(\lambda - R)^2 du^2 + (\lambda + R)^2 dv^2}{R} + d\lambda^2, \\ ds_2^2 = \dfrac{(\lambda + R)^2 du^2 + (\lambda - R)^2 dv^2}{R} + d\lambda^2; \end{cases}$$

les éléments superficiels dA_1, dA_2 de ces deux surfaces auront de même pour expressions

$$(4) \qquad \begin{cases} dA_1^2 = \left[\left(\dfrac{\lambda^2 - R^2}{R}\right)^2 + \dfrac{(\lambda + R)^2}{R}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{(\lambda - R)^2}{R}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2\right] du^2 dv^2, \\ dA_2^2 = \left[\left(\dfrac{\lambda^2 - R^2}{R}\right)^2 + \dfrac{(\lambda + R)^2}{R}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2 + \dfrac{(\lambda - R)^2}{R}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2\right] du^2 dv^2. \end{cases}$$

Pour que ces éléments superficiels soient identiques, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2$$

ou

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \pm \frac{\partial\lambda}{\partial v},$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \varphi(u + v) \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \varphi(u - v),$$

φ désignant une fonction arbitraire. En remarquant maintenant que les équations

$$u + v = \text{const.}, \qquad u - v = \text{const.}$$

représentent les deux systèmes de lignes asymptotiques de la surface, on est conduit au théorème suivant :

Étant donnée une surface minima quelconque, sur chaque normale on porte, à partir du pied M_0 *de la normale et de part et d'autre de ce point, deux longueurs égales* M_0M_1 *et* M_0M_2, *la longueur* M_0M_1 *restant constante quand on se déplace suivant une ligne asymptotique de l'un des systèmes et variant suivant une loi quelconque, quand on passe d'une ligne asymptotique à une autre du même système; les points* M_1, M_2 *décrivent deux surfaces* S_1, S_2, *telles qu'un pinceau de normales à la surface* S *découpe sur ces deux surfaces des aires équivalentes.*

On peut déduire de cette propriété la solution de certains problèmes de déblais et de remblais.

Prenons une portion finie S de surface minima sans point singulier et formons, comme il vient d'être expliqué, deux portions finies de surface S_1 et S_2; si l'on suppose ces deux surfaces S_1 et S_2 comprises tout entières à l'intérieur des deux nappes de la surface, lieu des centres de courbure principaux de S, les normales à la surface S permettront d'effectuer le déblai de S_1 sur S_2 et fourniront le *minimum absolu* du travail, pourvu que la portion S de surface soit suffisamment petite [voir Appell, *Mémoire sur les déblais et les remblais* (*Journal des Savants étrangers*, t. XXIX, p. 15)].