C.-A. LAISANT

Sur un déterminant remarquable

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 104-107

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__104_1>

Sur un déterminant remarquable; par C.-A. LAISANT.

Soit le déterminant

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & \ldots & \ldots & a_m \\ -1 & x & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Il est facile de démontrer que ce déterminant est identique au polynôme entier

$$(2)\qquad a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = f(x).$$

En effet, si on le développe suivant les éléments de la première colonne, on a

$$a_0\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & \ldots & \ldots & a_m \\ -1 & x & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & x & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Le premier de ces deux déterminants se réduit évidemment au terme de la diagonale x^m, et le second est identiquement de même forme que (1), mais compte un élément de moins par côté. Si donc la propriété est établie pour le déterminant de $(m-1)^2$ éléments, elle le sera, par cela même, pour celui de m^2 éléments. Or, pour deux éléments,

$$\begin{vmatrix} a_{m-1} & a_m \\ -1 & x \end{vmatrix},$$

elle est évidente, ce qui démontre l'identité des deux expressions (1) et (2).

Si, dans le déterminant (1), on remplace tous les éléments -1 par $-y$, ce qui donne

$$(1')\qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & \ldots & \ldots & a_m \\ -y & x & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -y & x & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -y & x & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -y & x & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -y & x \end{vmatrix},$$

on aura une expression identique à

$$(2')\quad a_0x^m + a_1x^{m-1}y + a_2x^{m-2}y^2 + \ldots + a_{m-1}xy^{m-1} + a_my^m = \varphi(x,y).$$

Cette remarque très simple permet donc d'écrire, sous forme de déterminant, soit un polynôme entier en x, soit une forme binaire de degré quelconque.

La loi de formation des dérivées du déterminant (1) est assez intéressante. Si, au-dessous des termes de la première ligne, on écrit successivement 0, 1, 2, 3, ... de droite à gauche, de manière à former le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m \\
m & m-1 & m-2 & \ldots & 2 & 1 & 0 \\
m-1 & m-2 & m-3 & \ldots & 1 & 0 & \\
m-2 & m-3 & m-4 & \ldots & 0 & & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots, & &
\end{array}$$

et si l'on remplace cette première ligne par les produits

$$\left.\begin{array}{llll}
1^\circ & \text{des éléments des} & 2 & \text{premières lignes} \\
2^\circ & \quad » & 3 & \quad » \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
p^\circ & \quad » & p+1 & \quad » \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right\} \text{de ce Tableau,}$$

on aura successivement, en supprimant chaque fois la dernière ligne et la dernière colonne du déterminant obtenu,

$$f'(x), \quad f''(x), \quad \ldots, \quad f^{(p)}(x), \quad \ldots.$$

Si l'on faisait la même opération, en conservant seulement le même nombre d'éléments, au lieu de supprimer chaque fois une ligne et une colonne, on aurait

$$xf'(x), \quad x^2f''(x), \quad \ldots, \quad x^pf^{(p)}(x), \quad \ldots.$$

Une règle analogue permet de former les dérivées de la forme binaire (1′) ou (2′). On écrira le Tableau

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
(\mathrm{Y}) & & 0 & 1 & 2 & \ldots & m-3 & m-2 & m-1 \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & m-2 & m-1 & m \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m \\
 & m & m-1 & m-2 & m-3 & \ldots & 2 & 1 & 0 \\
(\mathrm{X}) & m-1 & m-2 & m-3 & m-4 & \ldots & 1 & 0 & \\
 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & &
\end{array}$$

On comptera n lignes, à partir de celle des a, dans la région (X), p lignes dans la région (Y). Formant alors le produit des éléments qui se trouvent dans une même verticale, et prenant ce résultat pour première ligne du déterminant, en supprimant au fur et à mesure autant de colonnes, à gauche ou à droite, et autant de lignes au-dessous de celle des a, ou au bas du déterminant, qu'il y a de produits égaux à zéro, on a

$$\frac{d^{n+p}\varphi(x,y)}{dx^n\,dy^p}.$$

En ne supprimant ni lignes, ni colonnes, on aurait

$$x^n y^p\,\frac{d^{n+p}\varphi(x,y)}{dx^n\,dy^p}.$$