BULLETIN DE LA S. M. F.

CHAILAN

Mouvement d'un point pesant sur une sphère. Détermination, à l'aide des conditions initiales, des cas où le mobile quitte la sphère

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 112-118

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__112_1>

Mouvement d'un point pesant sur une sphère. — Détermination, à l'aide des conditions initiales, des cas où le mobile quitte la sphère; par M. Chailan.

(Séance du 23 janvier 1889.)

Soient r, θ et z les coordonnées semi-polaires d'un point M, de masse m, placé sur la surface intérieure d'une sphère de rayon l, le plan des xy étant le plan horizontal passant par le centre, l'axe des z étant dirigé vers le bas.

Les équations du mouvement sur la sphère sont

$$dt = \frac{l\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}}, \tag{1}$$

$$d\theta = \frac{cl\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{\varphi(z)}}, \tag{2}$$

en posant

$$\varphi(z) = (2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2,$$

les constantes étant données par

$$c^2 = (l^2 - z_0^2)v_0^2 \cos^2\alpha_0, \qquad c' = v_0^2 - 2gz_0.$$

Appelons α, β, γ les racines de $\varphi(z)$: nous savons que

$$(3) \qquad \begin{array}{c|cccccccc} z & -\infty & \gamma & -l & \alpha & z_0 & \beta & +l \\ \hline \varphi(z) & +\infty & 0 & -c^2 & 0 & v_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha_0 & 0 & -c^2 \end{array}$$

Nous avons, pour la pression,

$$\mathrm{N} = \frac{m}{l}(3gz + c');$$

cette pression sera nulle pour une valeur z_1,

$$z_1 = -\frac{c'}{3g}.$$

Cherchons les cas où z_1 sera compris entre les racines α et β, auxquels cas le point matériel quittera la sphère.

Pour que $\alpha < z_1 < \beta$, nous voyons, en nous reportant à (3), qu'il faut et il suffit que $-l < z_1$ ou

$$(4) \qquad l > \frac{c'}{3g},$$

et que $\varphi(z_1) > 0$ ou

$$(5) \qquad \frac{c'}{3}\left(l^2 - \frac{c'^2}{9g^2}\right) - c^2 > 0;$$

d'où

$$\cos^2\alpha_0 < \frac{c'}{3(l^2 - z_0^2)v_0^2}\left(l^2 - \frac{c'^2}{9g^2}\right).$$

En supposant (4) satisfait :

I. Si $\frac{c'}{3(l^2 - z_0^2)v_0^2}\left(l^2 - \frac{c'^2}{9g^2}\right) - 1 > 0$, le mobile quittera *forcément* la sphère, c'est-à-dire quelle que soit la direction initiale.

II. Si $\frac{c'}{3(l^2 - z_0^2)v_0^2}\left(l^2 - \frac{c'^2}{9g^2}\right) - 1 < 0$, le mobile quittera *conditionnellement* la sphère, c'est-à-dire pour toutes les directions de la vitesse initiale supérieures à l'angle déterminé par

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{c'}{3(l^2 - z_0^2)v_0^2}\left(l^2 - \frac{c'^2}{9g^2}\right),$$

équation qui aura une racine si

$$(6) \qquad c' > 0.$$

Le premier membre des deux inégalités considérées peut s'écrire

$$-\frac{v_0^2 + gz_0}{27g^2v_0^2(l^2 - z_0^2)}[v_0^4 - 7gz_0v_0^2 + 2g^2(9l^2 - 4z_0^2)];$$

laissons de côté le dénominateur, qui est toujours positif, et décomposons le trinôme entre crochets, en remarquant que ses deux racines sont du signe de z_0,

$$(7) \qquad -(v_0^2 + gz_0)\left[v_0^2 - \frac{g}{2}\left(7z_0 + 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}\right)\right]\left[v_0^2 - \frac{g}{2}\left(7z_0 - 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}\right)\right].$$

I. Cette expression (7) sera positive :

1° Si, en supposant $9z_0^2 < 8l^2$, nous avons

$$v_0^2 + gz_0 < 0,$$

cette inégalité implique $z_0 < 0$; alors (4) est forcément vérifié, car nous pouvons l'écrire

$$v_0^2 < g(3l + 2z_0).$$

2° Si, en supposant $9z_0^2 > 8l^2$:

(a) $z_0 < 0$, le trinôme a ses racines négatives, nous avons

$$v_0^2 + gz_0 < 0 :$$

l'inégalité (4) est encore satisfaite.

(b) $z_0 > 0$, alors $v_0^2 + gz_0$ est positif, nous avons

$$\frac{g}{2}\left(7z_0 - 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}\right) < v_0^2 < \frac{g}{2}\left(7z_0 + 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}\right):$$

l'inégalité (4) est vérifiée, car $g(3l + 2z_0)$ est supérieur à la plus grande des racines du trinôme.

II. L'expression (7) sera négative :

1° Si, en supposant $9z_0^2 < 8l^2$, nous avons

$$v_0^2 + gz_0 > 0,$$

(a) $z_0 < 0$, la condition (4) et la précédente nous donnent

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > -gz_0 :$$

l'inégalité (6) est forcément vérifiée.

(b) $z_0 > 0$, la condition $v_0^2 + g z_0 > 0$ est vérifiée d'elle-même, les inégalités (4) et (6) nous donnent

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > 2 g z_0.$$

2° Si, en supposant $9 z_0^2 > 8 l^2$:

(a) $z_0 < 0$, nous avons

$$v_0^2 + g z_0 > 0.$$

Cette condition, réunie avec (4), nous donne

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > - g z_0 :$$

l'inégalité (6) est forcément vérifiée.

(b) $z_0 > 0$, nous avons pour v_0^2 des valeurs prises en dehors des racines du trinôme.

Mais (6) indique qu'il faut prendre

$$v_0^2 > 2 g z_0;$$

or $2 g z_0$ est inférieure à la plus petite racine; de plus, nous devons satisfaire à (4), de telle sorte que nous pouvons prendre

$$\frac{g}{2}\left(7 z_0 - 3\sqrt{g z_0^2 - 8 l^2}\right) > v_0^2 > 2 g z_0$$

ou

$$g(3l + z_0) > v_0^2 > \frac{g}{2}\left(7 z_0 + 3\sqrt{g z_0^2 - 8 l^2}\right).$$

En résumé, si à l'origine :

I. Le mobile est au-dessus du plan des xy :

1° Il quittera forcément la sphère si

$$v_0^2 + g z_0 < 0;$$

2° Il quittera conditionnellement la sphère si

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > - g z_0.$$

II. Le mobile est au-dessous du plan des xy, mais au-dessus du plan $z = \frac{2}{3} l\sqrt{2}$.

Il quittera conditionnellement la sphère si

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > 2 g z_0.$$

III. Le mobile est au-dessous du plan $z = \frac{2}{3} l\sqrt{2}$:

1° Il quittera forcément la sphère si

$$\frac{g}{2}(7z_0 + 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}) > v_0^2 > \frac{g}{2}(7z_0 - 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2});$$

2° Il quittera conditionnellement la sphère si

$$\frac{g}{2}(7z_0 - 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}) > v_0^2 > 2gz_0$$

ou si

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > \frac{g}{2}(7z_0 + 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}).$$

Remarquons que, dans tous les cas où c' est positif et, par suite, z_1 est négatif, le mobile quitte la sphère dans l'hémisphère supérieur. Dans le cas que nous venons d'établir, au mouvement sur la sphère succédera un mouvement sur une parabole située dans un plan vertical. Nous pouvons obtenir l'équation de cette parabole dans son plan.

Supposons que le plan des xz soit parallèle au plan osculateur en z_1 à la trajectoire sphérique, dont ρ est le rayon de courbure. Nous savons que ρ est aussi le rayon de courbure de la parabole, et le rayon du petit cercle de la sphère déterminé par le plan osculateur.

La parabole à axe vertical

$$(x - \alpha)^2 = 2p(z - \beta)$$

sera la trajectoire si nous exprimons qu'elle a un contact du deuxième ordre au point z_1 avec le cercle

$$x^2 + z^2 = \rho^2,$$

ce qui aura lieu si nous prenons

$$\alpha = \frac{(\rho - z^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2},$$

$$\beta = \frac{z_1(3l^2 - z_1^2)}{2\rho^2},$$

$$p = -\frac{z_1^3}{\rho^2}.$$

Pour déterminer ρ, ne faisons plus d'hypothèse sur le plan des zx ; le rayon de courbure en z_1 est donné par la formule

$$\frac{v^2}{\rho} = g \sin\alpha.$$

De la formule connue

$$v^2 = 2gz + c'$$

nous tirons, pour $z = z_1$,

$$v^2 = \frac{c'}{3}.$$

Nous savons que

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}};$$

mais nous avons

$$r^2 + z^2 = l^2$$

et

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta;$$

d'où, en différentiant,

$$dx = -\frac{xz}{l^2 - z^2}\,dz - y\,d\theta,$$

$$dy = -\frac{gz}{l^2 - z^2}\,dz - x\,d\theta.$$

Ces formules, conjointement avec (1) et (2), nous donnent

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{xz}{l^2 - z^2}\,\frac{\sqrt{\varphi(z)}}{l} - \frac{cy}{l^2 - z^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{yz}{l^2 - z^2}\,\frac{\sqrt{\varphi(z)}}{l} + \frac{cx}{l^2 - z^2}, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{\sqrt{\varphi(z)}}{l}; \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(2gz + c')z^2 + c^2}{(2gz + c')l^2}};$$

faisons $z = z_1$,

$$\sin\alpha = \frac{1}{3gl}\sqrt{\frac{c'^3 + 27g^2c^2}{c'}},$$

d'où enfin

$$\rho = c'l\sqrt{\frac{c'}{c'^3 + 27g^2c^2}}.$$

Soit d la distance du plan de la parabole à l'axe des z : nous avons

$$d = \frac{3gcl\sqrt{3}}{\sqrt{c'^3 + 27g^2c^2}}.$$

Remarque. — Si le mobile est lancé sous la direction initiale α_0 définie par l'équation

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{c'}{3(l^2 - z_0^2)v_0^2}\left(l^2 - \frac{c'^2}{9g^2}\right),$$

le mobile ne quitte pas la sphère. En effet, cette égalité revient à

$$\varphi(z_1) = 0;$$

d'où

$$z_1 = \alpha.$$

Au point α, nous savons que la trajectoire sur la sphère a sa tangente horizontale ; la parabole à axe vertical, qui a même rayon de courbure, a alors avec la sphère un contact de troisième ordre ; elle est tout entière en dehors de la sphère : le point, ne pouvant, par hypothèse, traverser la sphère, restera sur cette surface.