BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Note sur les variations du rapport anharmonique de quatre points dont trois sont fixes

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 169-171
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__169_1>

Note sur les variations du rapport anharmonique de quatre points, dont trois sont fixes; par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 23 janvier 1889.)

1. Soit $\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MB}} : \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \lambda$ le rapport anharmonique des quatre points M, A, B, C situés dans un même plan, les trois points A, B, C étant fixes; λ sera en général un rapport géométrique dont le module r sera un nombre positif, et dont nous désignons l'argument par θ.

Posons, en outre,

$$\operatorname{gr} \mathrm{AC} = b, \qquad \operatorname{gr} \mathrm{AB} = c, \qquad \operatorname{ang} \mathrm{BAC} = \mathrm{A}.$$

Nous aurons

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MB}} = r\,\frac{b}{c}\,\varepsilon^{\theta+\mathrm{A}}. \tag{1}$$

2. La forme de cette relation (1) nous montre immédiatement :

1° Que si θ est constant et r variable, le lieu géométrique décrit par M est une circonférence passant par les points B et C (segment capable de l'angle $\theta + \mathrm{A}$, décrit sur la corde BC);

2° Que si r est constant et θ variable, le lieu géométrique de M est une circonférence dont le centre est situé sur BC $\left(\text{lieu des points tels que le rapport de deux distances à C et B est égal à } \frac{rb}{c}\right)$.

En particulier :

Si $\theta = 0$, le lieu géométrique de M est la circonférence circonscrite au triangle ABC; le rapport anharmonique est alors réel;

Si $\theta = -\mathrm{A}$, le lieu géométrique de M n'est autre que la droite BC;

Si $\theta = \frac{\pi}{2} - A$, le lieu géométrique de M est la circonférence décrite sur BC comme diamètre;

Si $r = 1$, le lieu géométrique de M est une circonférence passant par A, par le pied de la bissectrice de A dans le triangle ABC, et ayant son centre sur BC;

Si $r = \frac{c}{b}$, le lieu géométrique de M se réduit à la droite perpendiculaire sur le milieu de BC.

3. Lorsque, θ étant seul variable, on donne successivement à r deux valeurs r', r'', telles que $r'r'' = \frac{c^2}{b^2}$, les deux lieux géométriques qu'on obtient ainsi pour M sont deux circonférences symétriques par rapport au milieu du côté BC.

Lorsque, r étant seul variable, on donne successivement à θ deux valeurs θ', θ'', telles que $\theta' + \theta'' = -2A$, les deux lieux géométriques qu'on obtient pour M sont deux circonférences symétriques par rapport à la droite BC.

On remarquera que, dans le cas où r est variable, il faut, pour obtenir les lieux géométriques complets, supposer que r prend toutes les valeurs réelles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; autrement, en ne donnant à r que des valeurs positives, on n'aurait qu'un arc des circonférences en question

4. La relation (1) peut s'écrire $\frac{MC}{MB} = \lambda \frac{AC}{AB}$ ou

$$\text{M} - \text{C} = \lambda(\text{M} - \text{B})\frac{\text{A} - \text{C}}{\text{A} - \text{B}} = \lambda\alpha(\text{M} - \text{B}). \tag{2}$$

En la différentiant, on a

$$d\text{M}(1 - \lambda\alpha) = \alpha\, d\lambda(\text{M} - \text{B}).$$

Si l'on donne à λ un autre accroissement infiniment petit $\partial\lambda$, on aura de même

$$\partial\text{M}(1 - \lambda\alpha) = \alpha\,\partial\lambda(\text{M} - \text{B}),$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\text{M}}{\partial\text{M}} = \frac{d\lambda}{\partial\lambda}. \tag{3}$$

Appelons $d\lambda$ l'accroissement de λ lorsque, r restant constant, on fait seulement varier θ, et $\partial\lambda$ l'accroissement qu'on obtient en laissant θ constant et faisant varier r. Alors

$$d\lambda = i\,d\theta\, r\varepsilon^{\theta}, \qquad \partial\lambda = dr\,\varepsilon^{\theta}.$$

Donc, en vertu de la relation (3),

$$\frac{d\mathrm{M}}{\partial\mathrm{M}} = i\,\frac{r\,d\theta}{dr} \parallel i. \tag{4}$$

Il en résulte, par conséquent, que les deux déplacements infiniment petits du point M ainsi obtenus sont rectangulaires, c'est-à-dire que les deux systèmes de circonférences considérés au n° 2 ci-dessus sont orthogonaux.

5. Si l'on écrit une relation réelle quelconque entre les deux variables r et θ,

$$f(r, \theta) = 0, \tag{5}$$

le point M sera assujetti à se mouvoir sur une certaine courbe que l'équation (5) représente. On a ainsi un système de coordonnées tout à fait analogue comme notation aux coordonnées polaires, mais d'une interprétation géométrique bien différente.

Quand, une position du point M étant déterminée, on fait varier successivement l'une ou l'autre de ses deux coordonnées, en laissant l'autre fixe, le point M se déplace, soit sur l'une, soit sur l'autre des deux circonférences orthogonales des deux systèmes.

L'équation $r = 0$, en particulier, représente le point C et l'équation $r = \infty$, le point B.