H. JEFFERY

Sur l'identité des noeuds d'une courbe du quatrième ordre et des noeuds de ses contravariants quartique et sextique

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 176-182
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__176_0>

Sur l'identité des nœuds d'une courbe du quatrième ordre et des nœuds de ses contravariants quartique et sextique; par M. Henry Jeffery.

1. Puisque l'équation tangentielle d'une quartique est, en fonction de ses contravariants S et T, $S^3 - 27T^2 = 0$, on doit penser que ces courbes auxiliaires auront des nœuds si la quartique proposée en a elle-même.

Outre cela, les courbes $S = 0$ et $T = 0$ sont respectivement les enveloppes d'une droite qui coupe la quartique primitive en quatre points, formant une proportion équiharmonique et harmonique. Dans le voisinage d'un nœud, les points d'intersection se rapprochent de plus en plus, jusqu'à ce que trois d'entre eux coïncident, ou deviennent infiniment voisins, sur une tangente au nœud.

2. L'Auteur a vérifié par le calcul l'existence et l'identité de ces nœuds dans les cas séparés des quartiques uninodales, binodales et trinodales. Mais il faut distinguer: bien que les tangentes aux nœuds des courbes U (la quartique donnée), S et T soient identiques, la courbure des branches peut être différente.

Ordinairement, pour U et S, il n'y a pas d'inflexion; mais il y a deux inflexions en chaque nœud de T. En particulier, les contravariants S et T des quartiques bicirculaires sont doués de foyers doubles et triples respectivement. D'autres modifications se présenteront dans la suite.

3. Au moyen du principe de la dualité, on voit que les bitangentes d'une courbe de la quatrième classe appartiennent aussi à leurs contravariants.

4. I. *Les quartiques uninodales.* — La forme la plus générale de ces courbes (U) est, en coordonnées ponctuelles, si C, ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), est le nœud simple,

$$U \equiv 6\gamma^2(g\alpha^2 + 2n\alpha\beta + f\beta^2) + 4\gamma(a_3\alpha^3 + 3l\alpha^2\beta + 3m\alpha\beta^2 + b_3\beta^3) + a_1\alpha^4 + 4a_2\alpha^3\beta + 6h\alpha^2\beta^2 + 4b_1\alpha\beta^3 + b_2\beta^4 = 0.$$

Les deux tangentes en C, $(g\alpha^2 + 2n\alpha\beta + f\beta^2 = 0)$, rencontrent le côté AB en deux points, dont les coordonnées tangentielles sont

$$fp^2a^2 - 2npqab + gq^2b^2 = 0.$$

Nous désignons par $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ les coordonnées p, q, r.

On trouve dans les *Courbes supérieures*, de Salmon (p. 251), le contravariant S, dont l'équation peut être ainsi disposée

$$\begin{aligned} S \equiv{} & 3(fx^2 + gy^2 + hz^2 - 2lyz - 2mzx - 2nxy)^2 \\ & + 12z[nb_3x^3 + (3fl - 3mn - gb_3)x^2y \\ & \qquad + (3gm - 3nl - fa_3)xy^2 + na_3y^3] \\ & \qquad + z^2(x, y)^2 + z^3(x, y)^1 + z^4(x, y)^0 \end{aligned}$$

ou

$$S = 3v_2^2 + 12zu_3 + z^2Q. \tag{1}$$

De la même manière,

$$T \equiv - v_2^3 - 6zv_2u_3 + z^2R. \tag{2}$$

L'équation tangentielle de U,

$$S^3 - 27T^2 = 0,$$

développée, devient

$$v_2^2(12u_3^2 + 2Rv_2 + 27v_2^2) + z\varphi = 0. \tag{3}$$

Dans les équations (1), (2), (3), si $z = 0$, il reste

$$fx^2 - 2nxy + gy^2 = 0;$$

par conséquent, pour U, S, T, C est un nœud, et les tangentes en C sont identiques ; mais des inflexions se trouvent en T seulement.

Transformons cette proposition par le principe de la dualité : x, y, z sont des coordonnées trilinéaires, AB devient une tangente double des courbes (1), (2), (3); mais, pour la courbe (2), c'est une tangente en deux points stationnaires d'inflexion, savoir ceux où elle rencontre la conique v_2.

5. Si, dans la quartique uninodale U, les termes qui renferment γ disparaissent, les tangentes au nœud C sont stationnaires, et C est un point d'inflexion de chaque branche.

Ainsi

$$S \equiv 3v_2^2 + z^2Q; \qquad T \equiv - v_2^3 + z^2R,$$

et l'équation tangentielle de U est

$$v_2^2(2R + v_2 Q) + z^2 R' = 0.$$

Pour T et U, les nœuds sont identiques; mais les deux tangentes, qui sont menées par C à la conique v_2, sont des bitangentes doubles de S : il n'y a point de nœud pour S au point C.

6. II. *Les quartiques bicirculaires et binodales.* — On suppose que la quartique bicirculaire U est engendrée par la méthode de Laguerre, et que le cercle jacobien (J) et la conique différente (F) sont rapportés au triangle autopolaire ABC,

$$(\mathrm{J}) \qquad a^2\alpha^2 \cot A + b^2\beta^2 \cot B + c^2\gamma^2 \cot C = 0,$$

$$(\mathrm{F}) \qquad \frac{1}{l} a^2\alpha^2 + \frac{1}{m} b^2\beta^2 + \frac{1}{n} c^2\gamma^2 = 0.$$

Si l'on considère la quartique comme l'enveloppe d'un cercle variable, qui coupe J orthogonalement et dont le centre se trouve sur F, son équation est

$$\begin{aligned}(l+m+n)(a^2\alpha^2 c_1 + b^2\beta^2 c_2 + c^2\gamma^2 c_3)^2 - 4(a\alpha + b\beta + c\gamma)\\ \times(a^2\alpha^2 c_1 + b^2\beta^2 c_2 + c^2\gamma^2 c_3)(la\alpha c_1 + mb\beta c_2 + nc\gamma c_3)\\ + 4(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2(la^2\alpha^2 c_1^2 + mb^2\beta^2 c_2^2 + nc^2\gamma^2 c_3^2) = 0,\end{aligned}$$

c_1, c_2, c_3 désignant cot A, cot B, cot C.

De plus, soit

$$\begin{aligned}2\Sigma &= p^2(c_2 + c_3) + q^2(c_3 + c_1) + r^2(c_1 + c_2) - 2qrc_1 - 2rpc_2 - 2pqc_3\\ &= \omega_1\omega_2 \operatorname{coséc} A \operatorname{coséc} B \operatorname{coséc} C,\end{aligned}$$

$\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ étant les équations des points circulaires à l'infini.

La conique

$$\theta = lp^2 + mq^2 + nr^2 - (lc_1 + mc_2 + nc_3)2\Sigma = 0$$

est homofocale à la conique directrice F.

Posons

$$\begin{aligned}\frac{\varphi}{2\Sigma} = mn(q^2c_3 + r^2c_2 - 2c_2c_3\Sigma) + nl(r^2c_1 + p^2c_3 - 2c_3c_1\Sigma)\\ + lm(p^2c_2 + q^2c_1 - 2c_1c_2\Sigma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\chi}{4\Sigma^2} = (2l + m + n)(p^2mnc_2^2c_3^2 + q^2nlc_3^2c_1^2 + r^2lmc_1^2c_2^2\\ - lmn(pc_2c_3 + qc_3c_1 + rc_1c_2)^2.\end{aligned}$$

On a

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{S} = \theta^2 + 3\varphi,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{3}\,\mathrm{S} = {} & (lp^2 + mq^2 + nr^2)^2 \\ & -[lp^2(2lc_1 - mc_2 - nc_3) \\ & \quad + mq^2(2mc_2 - nc_3 - lc_1) + nr^2(2nc_3 - lc_1 - mc_2)]\,2\Sigma \\ & \quad + (l^2c_1^2 + m^2c_2^2 + n^2c_3^2 - mnc_2c_3 - nlc_3c_1 - lmc_1c_2)\,4\Sigma^2.\end{aligned}$$

$$\mathrm{T} = \theta^3 + \tfrac{9}{2}\theta\varphi + \tfrac{27}{2}\chi.$$

La forme équivalente de $\mathrm{U}(\mathrm{S}^3 - 27\mathrm{T}^2)$ devient

$$\theta^2(\tfrac{1}{4}\varphi^2 - \theta\chi) + \varphi^3 - \tfrac{9}{2}\theta\varphi\chi - \tfrac{27}{4}\chi^2 = 0,$$

dont chaque terme contient le facteur $4\Sigma^2$.

Par conséquent, il y a deux foyers doubles de S et U, et deux foyers triples de T, qui sont identiques avec les foyers simples de F. Il y a d'ailleurs quatre foyers simples de U, qui sont les foyers de la quartique de la quatrième classe

$$\varphi^2 - 4\theta\chi = 0.$$

7. On peut étendre la même recherche aux quartiques binodales. Si l'on modifie la méthode de Laguerre, une binodale peut être engendrée au moyen d'une conique directrice F, et l'on peut se servir des calculs du n° 6, si les symboles c_1, c_2, c_3 sont indéfinis, et si l'on introduit $c_2c_3 + c_3c_1 + c_1c_2$ à la place de l'unité, afin de rendre S et T homogènes. Par exemple, on écrira

$$\theta = (c_2c_3 + c_3c_1 + c_1c_2)(lp^2 + mq^2 + nr^2) - (lc_1 + mc_2 + nc_3)\,2\Sigma.$$

Dans ce cas général, $2\Sigma = 0$ désigne les deux points ω_1, ω_2, réels ou imaginaires, où la conique (J) rencontre la ligne de l'infini.

Pour S et U les tangentes en leurs nœuds communs sont celles qu'on peut mener par les points ω_1, ω_2 à la conique directrice F.

Pour T les nœuds sont identiques, mais il y a des inflexions de chaque branche. Au moyen de la transformation homographique, on peut étendre ces résultats aux quartiques binodales, si l'on écrit $\lambda\alpha$, $\mu\beta$, $\nu\gamma$ au lieu de α, β, γ, et par conséquent $\frac{x}{\lambda}$, $\frac{y}{\mu}$, $\frac{z}{\nu}$ au lieu de x, y, z.

8. *Les quartiques bicirculaires, dont les foyers sont collinéaires.* — Une telle quartique (U) est, en coordonnées cartésiennes,

$$l(x^2+y^2)^2+(1+fx)(x^2+y^2)=k(1+ex).$$

On peut démontrer qu'il y a deux foyers doubles qui sont identiques avec les intersections des coniques

$$2l(x^2-y^2)+fx=0, \qquad 4lxy+fy=0.$$

Ces points sont l'origine (0,0), et le point $\left(-\frac{f}{2l}, 0\right)$.

On peut établir que

$$3S = Q^2 - \tfrac{3}{4}RV - 3klR^2,$$
$$27T = -Q^3 + \tfrac{9}{8}QRV + 9kWR^2,$$

ξ, η sont les coordonnées tangentielles de Booth, et l'on a

$$R = \xi^2 + \eta^2 = \omega_1\omega_2,$$

points circulaires de l'infini,

$$Q = 2l + f\xi + R,$$

conique dont les foyers sont l'origine et le point $\left(-\frac{f}{2l}, 0\right)$

$$V = (\xi+f)^2 + \eta^2 + 4kle\xi - kef\eta^2,$$
$$W = l^2 + \tfrac{1}{2}l(\xi^2+\eta^2+f\xi) - \tfrac{3}{16}\eta^2(f^2 - kf - e^2kl).$$

Les foyers doubles de S et U coïncident avec les foyers triples de T.

On peut écrire l'équation tangentielle de U,

$$(2l+f\xi)^2[f^2+4(f+2kle)\xi+(4+2kef+16kl)\xi^2$$
$$+4k(2f-e)\xi^3+k^2e^2\xi^4]+\ldots,$$

les autres termes contenant $\omega_1\omega_2$ en facteur.

Le dernier facteur détermine les quatre foyers simples.

9. III. *Les quartiques trinodales.* — L'équation la plus générale de U avec trois nœuds aux points A, B, C est

$$u\beta^2\gamma^2 + v\gamma^2\alpha^2 + w\alpha^2\beta^2 + 2u'\alpha^2\beta\gamma + 2v'\alpha\beta^2\gamma + 2w'\alpha\beta\gamma^2 = 0.$$

Cette quartique est l'inverse de la conique

(1) $$u\alpha^2 + v\beta^2 + w\gamma^2 + 2u'\beta\gamma + 2v'\gamma\alpha + 2w'\alpha\beta = 0.$$

Comme auparavant, x, y, z désignent pa, qb, rc.

On peut trouver (*Courbes supérieures* de Salmon, p. 251) que

$$\tfrac{1}{3}S = \sigma_2^2 - 12\,xyz\,\sigma_1,$$
$$T = -\sigma_2^3 + 18\,\sigma_2\sigma_1 xyz + 54\,K x^2y^2z^2,$$

en posant

$$\sigma_2 = ux^2 + vy^2 + wz^2 - 2u'yz - 2v'zx - 2w'xy;$$

$\sigma_2 = 0$ est la conique B qui est touchée par les six tangentes nodales,

$$\sigma_1 = (v'w' - uu')\,x + (w'u' - vv')\,y + (u'v' - ww')\,z,$$
$$K = uvw + 2u'v'w' - uu'^2 - vv'^2 - ww'^2.$$

$K = 0$ est la discriminante de la conique (1).

Par conséquent S est une courbe quadrinodale de la quatrième classe, dont trois nœuds sont ceux de U; T est une courbe trinodale de la sixième classe, dont les nœuds sont les mêmes avec les inflexions

L'équation équivalente de $U(S^3 - 27T^2)$ devient

$$27K^2x^2y^2z^2 - \sigma_1 xyz(18K\sigma_2 + 16\sigma_1^2) - (K\sigma_2 + \sigma_1^2)\,\sigma_2^2 = 0.$$

Cette forme établit deux théorèmes (*Courbes supérieures*, p. 247):

A. *Les six tangentes menées à la courbe par ses trois nœuds touchent une conique.*

B. *Les tangentes aux nœuds touchent une autre conique.*

La première (A) est $K\sigma_2 + \sigma_1^2$, ou

(1) $\quad VWx^2 + WUy^2 + UVz^2 + 2UU'yz + 2VV'zx + 2WW'xy = 0,$

$U, \ldots, U', \ldots$ étant les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} u & w' & v' \\ w' & v & u' \\ v' & u' & w \end{vmatrix}.$$

Les six tangentes à cette conique sont les inverses des tangentes menées par A, B, C à la conique primitive (1).

La seconde conique (B) est $\sigma_2 = 0$; les six tangentes sont les lignes inverses des tangentes menées par A, B, C à la conique

$$vwx^2 + wuy^2 + uvz^2 - 2uu'yz - 2vv'zx - 2ww'xy = 0,$$

lesquelles passent par les points où la conique primitive (1) rencontre les côtés du triangle ABC.

Il y a un contact double entre les coniques (A) et (B).

10. Si l'on fait $u = v = w = 0$, la quartique se décompose en quatre droites

$$\alpha\beta\gamma\,(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma) = 0.$$

Le contravariant S est la courbe de la quatrième classe

$$\tfrac{1}{12}S = (u'yz + v'zx + w'xy)^2 - 3xyz(v'w'x + w'u'y + u'v'z) = 0.$$

Elle a quatre nœuds et une acubitangente, dont le contact est imaginaire, savoir

$$\frac{x}{u'} = \frac{y}{v'} = \frac{z}{w'}.$$

Le contravariant quartique de cette courbe est de l'ordre quatrième

$$\begin{aligned}(u'^2\alpha^2 + v'^2\beta^2 + w'^2\gamma^2 - v'w'\beta\gamma - w'u'\gamma\alpha - u'v'\alpha\beta)^2&\\ - 7u'v'w'\alpha\beta\gamma(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma) &= 0.\end{aligned}$$

La ligne $(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma)$ est une acubitangente de cette courbe. Ainsi le principe de dualité du n° 3 est encore vrai.