Bulletin de la S. M. F.

M. Frolov

Égalités à deux degrés

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 69-83
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__69_1>

Égalités à deux degrés (¹); par M. Michel Frolov.

> Le but unique de la Science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et, sous ce titre, une question des nombres vaut autant qu'une question du système du monde.
>
> Jacobi à Legendre.

1. *Définitions.* — Étant donnés deux ou plusieurs groupes d'un même nombre de termes, tels qu'en prenant les termes de chaque groupe non seulement au premier, mais aussi au second degré, on obtient, dans les deux cas, des sommes égales pour tous les groupes, nous dirons que ces groupes forment une *égalité à deux degrés*.

Ainsi, lorsqu'il y a simultanément

$$(1)\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n = \ldots$$

ou

$$\Sigma a = \Sigma b = \Sigma c = \ldots$$

et

$$(2)\quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = c_1^2 + c_2^2 + \ldots c_n^2 = \ldots$$

ou

$$\Sigma a^2 = \Sigma b^2 = \Sigma c^2 = \ldots,$$

on a une égalité à deux degrés que nous représenterons par la

(¹) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 19 novembre 1888.

notation abrégée

$$a_1 a_2 \ldots a_n \perp b_1 b_2 \ldots b_n \perp c_1 c_2 \ldots c_n \perp \ldots,$$

ou

$$\Sigma a \perp \Sigma b \perp \Sigma c \ldots.$$

Les égalités de cette espèce donnent lieu à des procédés particuliers.

Examinons le cas le plus simple, celui où l'on n'a que deux groupes égaux,

$$a_1 a_2 \ldots a_n \perp \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_n.$$

Il est évident que les différences des termes correspondants

$$\mathrm{A}_1 - a_1 = d_1, \qquad \mathrm{A}_2 - a_2 = d_2, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{A}_n - a_n = d_n$$

doivent satisfaire aux équations

$$(1)\quad \begin{cases} d_1 + d_2 + \ldots + d_n = \Sigma d = 0 \\ \text{et} \\ 2(a_1 d_1 + a_2 d_2 + \ldots + a_n d_n) + d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = 2\Sigma ad + \Sigma d^2 = 0. \end{cases}$$

Ces équations expriment les conditions fondamentales de la question.

Par exemple, étant données les égalités

$$1 + 16 + 26 + 31 = 6 + 11 + 21 + 36 = 74$$

et

$$1^2 + 16^2 + 26^2 + 31^2 = 6^2 + 11^2 + 21^2\ 36^2 = 1894,$$

nous les exprimerons plus simplement

$$1,\ 16,\ 26,\ 31 \perp 6,\ 11,\ 21,\ 36.$$

En prenant les différences

$$6 - 1 = +5, \qquad 11 - 16 = -15, \qquad 21 - 16 = -5, \qquad 36 - 31 = +5,$$

on a

$$\Sigma d = +5 - 5 - 5 + 5 = 0,$$

$$2\Sigma ad + d^2 = 2[1 \times (+5) + 16 \times (-5) + 26 \times (-5) + 31 \times (+5)] \\ + (+5)^2 + (-5)^2 + (-5)^2 + (+5)^2 = 0.$$

Les égalités à deux degrés possèdent plusieurs propriétés que nous exposerons dans les théorèmes suivants.

2. Théorème I. — *On peut augmenter ou diminuer de la même quantité tous les termes d'une égalité.*

Ce théorème a lieu pour les égalités à plusieurs degrés consécutifs. Soit

$$\Sigma a = \Sigma \mathrm{A}, \quad \Sigma a^2 = \Sigma \mathrm{A}^2, \quad \Sigma a^3 = \Sigma \mathrm{A}^3, \quad \ldots, \quad \Sigma a^k = \Sigma \mathrm{A}^k, \quad \ldots.$$

Il suffit de démontrer ce théorème relativement à l'exposant général k.

En ajoutant une quantité quelconque h à tous les termes de la dernière égalité, on aura

$$\Sigma(a \pm h)^k = \Sigma a^k \pm kh\Sigma a^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} h^2 \Sigma a^{k-2} \pm \frac{k(k-1)(k-2)}{2 \times 3} h^3 \Sigma a^{k-3} \ldots,$$

$$\Sigma(\mathrm{A} \pm h)^k = \Sigma \mathrm{A}^k \pm kh\Sigma \mathrm{A}^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} h^2 \Sigma \mathrm{A}^{k-2} \pm \frac{k(k-1)(k-2)}{2 \times 3} h^3 \Sigma \mathrm{A}^{k-3} \ldots.$$

Les seconds membres de ces deux égalités étant égaux, terme à terme, il en résulte

$$\Sigma(a \pm h)^k = \Sigma(\mathrm{A} \pm h)^k, \quad \Sigma(a \pm h)^2 = \Sigma(\mathrm{A} \pm h)^2, \quad \Sigma(a \pm h) = \Sigma(\mathrm{A} \pm h).$$

Donc on a

$$\Sigma(a \pm h) \perp \Sigma(\mathrm{A} \pm h),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Par exemple, en ajoutant 3 à tous les termes de l'égalité

$$1,\ 4,\ 6,\ 7 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8,$$

on aura

$$4,\ 7,\ 9,\ 10 \perp 5,\ 6,\ 8,\ 11;$$

en retranchant 1 de tous les termes de cette dernière égalité, on aura

$$3,\ 6,\ 8,\ 9 \perp 4,\ 5,\ 7,\ 10.$$

3. Théorème II. — *On peut retrancher d'une même quantité tous les termes d'une égalité.*

Ce théorème, qui permet de remplacer tous les termes d'une égalité par les termes complémentaires, se démontre tout aussi aisément. En effet, étant donnée $\Sigma a \perp \Sigma \mathrm{A}$, on aura, en retranchant tous les termes d'une quantité p,

$$\Sigma(p-a)^k = p^k - kp^{k-1}\Sigma a + \frac{k(k-1)}{2}p^{k-2}\Sigma a^2 - \frac{k(k-1)(k-2)}{2\times 3}p^{k-3}\Sigma a^3 \ldots,$$

$$\Sigma(p-\mathrm{A})^k = p^k - kp^{k-1}\Sigma \mathrm{A} + \frac{k(k-1)}{2}p^{k-2}\Sigma \mathrm{A}^2 - \frac{k(k-1)(k-2)}{2\times 3}p^{k-3}\Sigma \mathrm{A}^3 \ldots.$$

Il en résulte

$$\Sigma(p-a)^k = \Sigma(p-\mathrm{A})^k, \quad \Sigma(p-a)^2 = \Sigma(p-\mathrm{A})^2, \quad \Sigma(p-a) = \Sigma(p-\mathrm{A}),$$

donc

$$\Sigma(p-a) \perp (p-\mathrm{A}).$$

Par exemple, en retranchant de 22 les termes de l'égalité

$$1,\ 3,\ 10,\ 20 \perp 2,\ 4,\ 7,\ 21,$$

on obtient

$$21,\ 19,\ 12,\ 2 \perp 20,\ 18,\ 15,\ 1.$$

4. Théorème III. — *On peut multiplier ou diviser par la même quantité tous les termes d'une égalité.*

Par exemple, en multipliant par 2 les termes de l'égalité

$$3,\ 15,\ 18 \perp 6,\ 9,\ 21,$$

on a

$$6,\ 30,\ 36 \perp 12,\ 18,\ 42;$$

en divisant cette dernière par 3, on obtient

$$2,\ 10,\ 12 \perp 4,\ 6,\ 14.$$

Ce théorème se démontre comme les deux précédents. A l'aide des trois théorèmes que nous venons d'exposer, on peut déduire d'une seule égalité beaucoup d'autres contenant le même nombre de termes.

5. Théorème IV. — *On peut faire l'addition de deux ou plusieurs égalités.*

Ce théorème, dont la vérité se voit immédiatement et qui permet de passer des égalités données à des égalités nouvelles contenant un nombre de termes plus élevé, peut être appliqué de différentes manières, soit en additionnant séparément les premiers et les seconds groupes, soit en transposant les groupes de quelques égalités.

Par exemple, on peut faire l'addition de deux égalités

$$1,\ 4,\ 6,\ 7 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8,$$
$$9,\ 13,\ 14 \perp 10,\ 11,\ 15$$

de deux manières et l'on obtient deux égalités de sept termes

$$1,\ 4,\ 6,\ 7,\ \ 9,\ 13,\ 14 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 15,$$
$$1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 15 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ 9,\ 13,\ 14.$$

6. *Égalités semblables.* — Nous dirons que les égalités ayant le même nombre de termes sont *semblables,* si les différences des termes correspondants, dont nous avons parlé dans le § 1, sont proportionnelles les unes aux autres.

Ainsi les deux égalités

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \perp A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$$

et

$$b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \perp B_1 B_2 B_3 \ldots B_n$$

sont semblables si l'on a

$$\frac{B_1 - b_1}{A_1 - a_1} = \frac{B_2 - b_2}{A_2 - a_2} = \frac{B_3 - b_3}{A_3 - a_3} = \ldots = \frac{B_n - b_n}{A_n - b_n}.$$

Par exemple, les égalités

$$4,\ 32,\ 36,\ \perp 12,\ 16,\ 44 \qquad \text{et} \qquad 7,\ 35,\ 42 \perp 14,\ 21,\ 49$$

sont semblables, puisque l'on a

$$\frac{14-7}{12-4} = \frac{21-35}{16-32} = \frac{49-42}{44-36}.$$

On déduit de cette définition le théorème suivant :

7. Théorème V. — *On peut additionner les termes correspondants des égalités semblables.*

Par exemple, en additionnant les termes des égalités semblables

$$1,\ 4,\ 6,\ 7 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8 \quad \text{et} \quad 1,\ 8,\ 11,\ 14 \perp 3,\ 6,\ 9,\ 16,$$

on a

$$2,\ 12,\ 17,\ 21 \perp 5,\ 9,\ 14,\ 24.$$

REMARQUE. — *En multipliant les termes d'une égalité par les termes correspondants d'une autre qui lui est semblable, les sommes des produits seront égales.*

Par exemple, en appliquant cette opération aux deux égalités

$$1,\ 4,\ 6,\ 7 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8 \quad \text{et} \quad 1,\ 8,\ 11,\ 14 \perp 3,\ 6,\ 9,\ 16,$$

on aura

$$1 \times 1 + 4 \times 8 + 6 \times 11 + 7 \times 14 = 2 \times 3 + 3 \times 6 + 5 \times 9 + 8 \times 16 = 197.$$

Cette propriété se démontre aisément.

8. THÉORÈME VI. — *On peut ajouter aux termes des deux groupes d'une égalité une suite de quantités déterminées autant de fois que l'on voudra.*

Soit

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \perp A_1 A_2 A_3 \ldots A_n.$$

En ajoutant aux termes des deux groupes les quantités r_1, r_2, r_3, ..., r_n, on aura

$$(a_1 + r_1),\quad (a_2 + r_2),\quad \ldots,\quad (a_n + r_n)$$
$$\perp (A_1 + r_1),\quad (A_2 + r_2),\quad \ldots,\quad (A_n + r_n).$$

Pour satisfaire aux conditions fondamentales exprimées par les équations (I), on doit avoir

$$(A_1 - a_1) r_1 + (A_2 - a_2) r_2 + \ldots + (A_n - a_n) r_n = \Sigma (A - a) r = 0,$$

ou, en reprenant la notation du § 1,

$$\text{(II)} \qquad d_1 r_1 + d_2 r_2 + \ldots + d_n r_n = \Sigma d r = 0.$$

Cette équation sert à déterminer les quantités additionnelles r.

Par exemple, l'égalité

$$1,\ 5,\ 6 \perp 2,\ 3,\ 7$$

donne les différences

$$d_1 = 2 - 1 = +1, \qquad d_2 = 3 - 5 = -2, \qquad d_3 = 7 - 6 = +1.$$

Donc on a

$$r_3 = 2 r_2 - r_1.$$

En posant $r_1 = 0$, nous trouvons

$$r_3 = 2 r_2.$$

Ainsi, on peut prendre une des suites additionnelles o, 1, 2; o, 2, 4; o, 3, 6; .... En nous servant de la suite o, 1, 2 et en l'ajoutant successivement, nous aurons

$$1,\ 6,\ 8 \perp 2,\ 4,\ 9;\quad 1,\ 7,\ 10 \perp 2,\ 5,\ 11;\quad 1,\ 8,\ 12 \perp 2,\ 6,\ 13;\quad \ldots.$$

L'égalité

$$1,\ 3,\ 8,\ 14 \perp 2,\ 4,\ 5,\ 15$$

donne les différences

$$d_1 = +1,\qquad d_2 = +1,\qquad d_3 = -3,\qquad d_4 = -1.$$

Donc

$$r_4 = 3r_3 - (r_1 + r_2).$$

En faisant $r_1 = 0$, on aura

$$r_4 = 3r_3 - r_2.$$

Ainsi l'on peut choisir entre les suites o, o, 1, 3; o, 1, 1, 2; o, 1, 2, 5; .... En choisissant la suite o, o, 1, 3, nous obtiendrons

$$1,\ 3,\ 9,\ 17 \perp 2,\ 4,\ 6,\ 18;\qquad 1,\ 3,\ 10,\ 20 \perp 2,\ 4,\ 7,\ 21;\qquad \ldots.$$

9. *Première méthode de la formation des égalités.* — On prendra des nombres quelconques; on formera une identité en les disposant dans deux ordres différents; après avoir déterminé les suites additionnelles, au moyen de l'équation (II), on les ajoutera aux deux membres de l'identité jusqu'à ce que tous les termes prennent des valeurs différentes.

Commençons par les égalités les plus simples, celles qui ne contiennent que deux groupes de trois termes.

Dans ce cas, on peut composer l'identité d'après l'une des deux formes

$$(1)\qquad a_1 a_2 a_3 \perp a_3 a_1 a_2$$

et

$$(2)\qquad a_1 a_2 a_3 \perp a_2 a_3 a_1.$$

En posant $r_1 = 0$, on tirera de l'équation (II), pour la première forme,

$$r_3 = \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_3}\, r_2.$$

et pour la seconde,

$$r_3 = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3} r_2,$$

Prenons l'identité $1, 3, 2 \perp 2, 1, 3$ composée d'après la première forme. La formule correspondante donne $r_3 = 2r_2$; donc on peut se servir de la suite 0, 1, 2, que nous avons déjà employée dans le § 8,

$$\begin{array}{r}
1,\ 3,\ 2 \perp 2,\ 1,\ 3 \\
+\ 0,\ 1,\ 2 + 0,\ 1,\ 2 \\
\hline
1,\ 4,\ 4 \perp 2,\ 2,\ 5 \\
+\ 0,\ 1,\ 2 + 0,\ 1,\ 2 \\
\hline
1,\ 5,\ 6 \perp 2,\ 3,\ 7
\end{array}$$

C'est la première égalité obtenue par ce procédé qui soit composée de nombres différents. En continuant l'addition, on obtient successivement

$1, 6, 8 \perp 2, 4, 9$; $1, 7, 10 \perp 2, 5, 11$; $1, 8, 12 \perp 2, 6, 13$; ....

Étant appliqué aux identités

$3, 5, 1 \perp 5, 1, 3$ et $4, 7, 1 \perp 7, 1, 4$,

ce procédé donne des égalités

$1, 8, 9 \perp 3, 4, 11$ et $1, 11, 12 \perp 4, 5, 15$,

semblables aux précédentes, et, par conséquent, on peut additionner leurs termes correspondants.

En ajoutant aux identités

$1, 4, 3 \perp 3, 1, 4$; $1, 4, 2 \perp 2, 1, 4$;
$1, 6, 4 \perp 4, 1, 6$; $1, 6, 3 \perp 3, 1, 6$

respectivement les suites 0, 1, 3 ; 0, 2, 3 ; 0, 2, 5 et 0, 3, 5, on trouve des égalités

$1, 7, 12 \perp 3, 4, 13$; $1, 10, 11 \perp 2, 7, 13$;
$1, 10, 14 \perp 4, 5, 16$; $1, 12, 13 \perp 3, 7, 16$;

qui ne sont semblables ni aux précédentes, ni entre elles.

En passant aux égalités de quatre termes, prenons l'identité

$1, 4, 2, 3 \perp 2, 3, 1, 4$.

On peut lui appliquer les suites 0, 0, 1, 1 ; 0, 1, 1, 2 ; 0, 1, 2, 3 ;

o, 1, 3, 4; ... déterminées à l'aide de l'équation (II). En se servant de la première suite, on obtient

$$1, 4, 6, 7 \perp 2, 3, 5, 8; \quad 1, 4, 7, 8 \perp 2, 3, 6, 9; \quad \ldots.$$

L'identité de cinq termes

$$1, 4, 3, 5, 2 \perp 3, 5, 2, 1, 4$$

produit, au moyen de la suite o, o, 2, 3, 7, les égalités

$$1, 4, 9, 14, 23 \perp 3, 5, 8, 10, 25;$$
$$1, 4, 11, 17, 30 \perp 3, 5, 10, 13, 32;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

10. *Deuxième méthode de la formation des égalités.* — Nous avons déjà dit dans le n° 5 que l'on peut passer des égalités données à des égalités nouvelles contenant un plus grand nombre de termes. En se servant d'une seule égalité, on peut en déduire d'autres dont le nombre est de deux ou de plusieurs fois plus élevé. Par exemple, en prenant l'égalité de trois termes

$$1, 5, 6 \perp 2, 3, 7$$

et en ajoutant à ses termes le nombre 7 égal au plus élevé des termes, nous obtiendrons, en additionnant la nouvelle égalité

$$8, 12, 13 \perp 9, 10, 14,$$

et l'égalité primordiale de deux manières indiquées au n° 5, deux égalités de six termes

$$1, 5, 6, 8, 12, 13 \perp 2, 3, 7, 9, 10, 14;$$
$$1, 5, 6, 9, 10, 14 \perp 2, 3, 7, 8, 12, 13.$$

En augmentant de 14 les termes de l'égalité primordiale et en ajoutant la nouvelle égalité

$$15, 19, 20 \perp 16, 17, 21$$

aux précédentes également de deux manières, nous obtiendrons quatre égalités de neuf termes :

$$1, 5, 6, 8, 12, 13, 15, 19, 20 \perp 2, 3, 7, 9, 10, 14, 16, 17, 21,$$
$$1, 5, 6, 8, 12, 13, 16, 17, 21 \perp 2, 3, 7, 9, 10, 14, 15, 19, 20,$$
$$1, 5, 6, 9, 10, 14, 15, 19, 20 \perp 2, 3, 7, 8, 12, 13, 16, 17, 21,$$
$$1, 5, 6, 9, 10, 14, 16, 17, 21 \perp 2, 3, 7, 8, 12, 13, 15, 19, 20.$$

Étant données deux égalités

$$1,\ 5,\ 6 \perp 2,\ 3,\ 7$$

de trois termes, et

$$1,\ 4,\ 6,\ 7 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8$$

de quatre termes, en augmentant de 8 les termes de la première, on a

$$9,\ 13,\ 14 \perp 10,\ 11,\ 15,$$

et en ajoutant celle-ci à la deuxième égalité de deux manières, nous obtiendrons deux égalités de sept termes :

$$1,\ 4,\ 6,\ 7,\ \ 9,\ 13,\ 14 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 15,$$
$$1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 15 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ 9,\ 13,\ 14.$$

Il est facile de comprendre qu'en combinant entre elles une égalité de trois termes et une autre de quatre termes on peut composer des égalités contenant autant de termes que l'on voudra.

11. *Répartition des nombres consécutifs en deux groupes égaux.*

Nous nous proposerons à présent de répartir en deux groupes égaux tous les nombres consécutifs d'une progression arithmétique, sans omettre ni répéter aucun de ces nombres.

La plus petite progression des nombres naturels qui peuvent être répartis en deux groupes égaux est celle qui contient huit nombres. Cette répartition est formulée par l'égalité suivante, que nous avons déjà citée plus d'une fois,

$$1,\ 4,\ 6,\ 7 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8.$$

En augmentant tous les termes de 8, nous aurons

$$9,\ 12,\ 14,\ 15 \perp 10,\ 11,\ 13,\ 16.$$

Si nous additionnons ces deux égalités de deux manières, nous obtenons deux égalités représentant la répartition des 16 nombres consécutifs en deux groupes égaux :

$$1,\ 4,\ 6,\ 7,\ \ 9,\ 12,\ 14,\ 15 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 16,$$
$$1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 13,\ 16 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ 9,\ 12,\ 14,\ 15.$$

En augmentant tous les termes de l'égalité primordiale encore de

8, nous aurons

17, 20, 22, 23 $\perp$ 18, 19, 21, 24.

En ajoutant cette nouvelle égalité aux deux précédentes, aussi de deux manières, nous aurons quatre égalités représentant la répartition des 24 nombres consécutifs en deux groupes égaux :

1, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 17, 20, 22, 23
$\perp$ 2, 3, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 18, 19, 21, 24;

1, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18, 19, 21, 24
$\perp$ 2, 3, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 20, 22, 23;

1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16, 17, 20, 22, 23
$\perp$ 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15, 18, 19, 21, 24;

1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16, 18, 19, 21, 24
$\perp$ 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 20, 22, 23.

En répétant le même procédé, on peut répartir les 32 nombres consécutifs de 8 manières, les 40 de 16 manières et en général les $8m$ nombres de $2^{(m-1)}$ manières différentes.

Mais ce n'est pas tout, car on pourrait trouver encore bien d'autres égalités, en transposant d'un groupe à un autre les groupes inférieurs. Par exemple, dans la première des égalités de 12 termes, on peut transposer les deux groupes de l'égalité

1, 12, 20 $\perp$ 2, 10, 21

et l'on aura une cinquième égalité

2, 4, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 17, 21, 22, 23
$\perp$ 1, 3, 5, 8, 11, 12, 13, 16, 18, 19, 20, 24.

On peut encore transposer dans la première et la dernière égalité les groupes

3, 11, 16 $\perp$ 4, 9, 17

et l'on aura encore deux égalités

1, 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 16, 20, 22, 23
$\perp$ 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 17, 18, 19, 21, 24;

2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 21, 22, 23
$\perp$ 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 24.

On peut également répartir en deux groupes égaux les 12 nombres consécutifs, comme le montre l'égalité

$$1,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11 \perp 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12.$$

En augmentant tous les termes de 12 :

$$13,\ 15,\ 19,\ 20,\ 21,\ 23 \perp 14,\ 16,\ 17,\ 18,\ 22,\ 24$$

et en additionnant ces égalités de deux manières, on obtient encore deux manières de répartir 24 nombres consécutifs en deux groupes égaux :

$$\begin{array}{l} \ \ 1,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 19,\ 20,\ 21,\ 23 \\ \perp 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 17,\ 18,\ 22,\ 24; \\ \ \ 1,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 14,\ 16,\ 17,\ 18,\ 22,\ 24 \\ \perp 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 13,\ 15,\ 19,\ 20,\ 21,\ 23. \end{array}$$

La répartition en deux groupes égaux de 20, 28, ..., $4m$ nombres consécutifs peut se faire en additionnant les groupes de quatre, de six, de huit termes. Ainsi on peut répartir en deux groupes égaux toute progression de $4m$ nombres consécutifs.

12. *Répartition des nombres consécutifs en plusieurs groupes égaux.*

Toute progression arithmétique peut être divisée en n groupes égaux, si le nombre de ses termes est égal au carré double du nombre de groupes, c'est-à-dire si elle contient $2n^2$ termes. Ainsi, l'on peut diviser en trois groupes égaux une progression contenant 18 termes, en quatre groupes une progression contenant 32 termes, etc.

Voici la règle à suivre : il faut diviser la progression en n sections, ayant chacune $2n$ nombres consécutifs; puis réunir les nombres de chaque section en n couples, dont le 1er soit formé de deux nombres du milieu, le 2e de deux nombres voisins des précédents et ainsi de suite. Pour composer les groupes, on prendra dans toutes les sections des couples différents.

Cette règle est basée sur des considérations suivantes :

Soient Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n les sommes des carrés des deux nombres du 1er couple dans la 1re, la 2e, ..., la $n^{\text{ième}}$ section; les sommes des carrés des nombres dans toutes les sections seront

Du 2^e	couple....	$Q_1 + 4$;	$Q_2 + 4$;	...;	$Q_n + 4$
» 3^e	»	$Q_1 + 12$;	$Q_2 + 12$;	...;	$Q_n + 12$
» 4^e	»	$Q_1 + 24$;	$Q_2 + 24$;	...;	$Q_n + 24$
» 5^e	»	$Q_1 + 40$;	$Q_2 + 40$;	...;	$Q_n + 40$
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
» $n^{\text{ème}}$	»	$Q_1 + 2n(n-1$;	$Q_2 + 2n(n-1)$;	...;	$Q_n + 2n(n-1)$.

Il en résulte qu'en prenant pour chaque groupe des couples différents dans toutes les sections, on obtiendra invariablement la même somme des carrés

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n + 0 + 4 + 12 + 24 + \ldots + 2n(n-1).$$

Quant à l'égalité des sommes des premières puissances, elle est évidente, vu que tous les couples donnent des sommes égales dans chaque section. Par conséquent, tous les groupes seront égaux à deux degrés.

Commençons par la répartition de 18 nombres consécutifs en trois groupes. Représentons les couples dans une Table à deux entrées :

COUPLES. / SECTIONS.	I.	II.	III.
1	3 4	2 5	1 6
2	9 10	8 11	7 12
3	15 16	14 17	13 18

et composons les groupes en prenant les couples d'après la forme, successivement dans la 1re, la 2e et la 3e section,

III, II, I
II, I, III
I, III, II.

Il en résultera l'égalité

$$1, 6, 8, 11, 15, 16 \perp 2, 5, 9, 10, 13, 18 \perp 3, 4, 7, 12, 14, 17.$$

En remplaçant, d'après le théorème II, tous les nombres par leurs compléments : 1 par 18, 2 par 17, etc., et *vice versa,* nous obtiendrons une seconde égalité

$$1, 6, 9, 10, 14, 17 \perp 2, 5, 7, 12, 15, 16 \perp 3, 4, 8, 11, 13, 18.$$

En transposant, dans la première égalité, les deux groupes égaux

$$4, 12, 17 \perp 5, 10, 18,$$

et dans la seconde les groupes égaux

$$5, 12, 16 \perp 6, 10, 17,$$

nous aurons encore deux égalités, aussi complémentaires l'une de l'autre,

$$1, 6, 8, 11, 15, 16 \perp 2, 4, 9, 12, 13, 17 \perp 3, 5, 7, 10, 14, 18$$
$$1, 5, 9, 12, 14, 16 \perp 2, 6, 7, 10, 15, 17 \perp 3, 4, 8, 11, 13, 18.$$

On peut décomposer une progression de 32 nombres consécutifs en quatre groupes, d'après 24 formes différentes qui, par la permutation des rangées verticales, excepté la première, se réduisent à quatre types :

1.

IV,	III,	II,	I
III,	IV,	I,	II
II,	I,	IV,	III
I,	II,	III,	IV

2.

IV,	III,	II,	I
III,	IV,	I,	II
II,	I,	III,	IV
I,	II,	IV,	III

3.

IV,	III,	II,	I
III,	II,	I,	IV
II,	I,	IV,	III
I,	IV,	III,	II

4.

IV,	III,	II,	I
III,	I,	IV,	II
II,	IV,	I,	III
I,	II,	III,	IV

Pour $n = 5$, on a 56 types qui, par la permutation des rangées verticales, produisent $56 \times 24 = 1344$ formes. On voit qu'en augmentant n le nombre des formes croît très rapidement.

13. *Égalité à trois degrés.* — Nous nous bornerons à donner quelques exemples d'égalités de cette espèce qui donnent des sommes égales, en prenant les nombres aux 1^er^, 2^e^ et 3^e^ degrés. Pour les représenter nous adopterons une notation particulière :

(1) $1, 14, 22, 35 \Delta 2, 11, 25, 34.$

Les sommes des premières puissances sont égales à 72, des secondes à 1906, et des troisièmes à 56268

(2) $1, 10, 11, 13, 14, 23 \Delta 3, 6, 9, 15, 18, 21,$

dont les sommes respectives sont 72, 1116, 19470,

(3) $1, 12, 13, 21, 22, 33 \Delta 3, 7, 16, 18, 27, 31,$

dont les sommes sont 102, 2328, 59772.

Rappelons que les transformations exposées dans les théorèmes I, IV étant aussi applicables aux égalités de cette espèce, on peut obtenir d'une égalité donnée beaucoup d'autres égalités.

Par exemple, en diminuant de 1 tous les termes de la deuxième égalité, on a

$$0, 9, 10, 12, 13, 22 \Delta 2, 5, 8, 14, 17, 20.$$

En multipliant par 2,

$$0, 18, 20, 24, 26, 44 \Delta 4, 10, 16, 28, 34, 40.$$

En ajoutant 1 à tous les termes, on obtient

(4) $1, 19, 21, 25, 27, 45 \Delta 5, 11, 17, 29, 35, 41.$

En augmentant de 3 les termes de la deuxième égalité, on a

$$4, 13, 14, 16, 17, 26 \Delta 6, 9, 12, 18, 21, 24,$$

et en lui ajoutant cette nouvelle égalité, on obtient

(5) $1, 10, 11, 12, 23, 24 \Delta 3, 4, 15, 16, 17, 26.$

Ajoutons cette dernière à la troisième égalité et nous aurons une égalité de 8 termes :

(6) $1, 10, 12, 14, 18, 19, 23, 30 \Delta 4, 7, 8, 15, 20, 21, 24, 28.$