MAURICE D'OCAGNE

# Sur l'application des coordonnées parallèles à la démonstration d'un théorème de Chasles relatif aux surfaces algébriques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 18 (1890), p. 108-118

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__108_1>

*Sur l'application des coordonnées parallèles à la démonstration d'un théorème de Chasles relatif aux surfaces algébriques;* par M. M. d'Ocagne.

(Séance du 19 février 1890.)

1. Le théorème que nous avons en vue est le suivant :

*Le centre des moyennes distances des points de contact d'une surface algébrique avec ses plans tangents parallèles à un plan donné est fixe quel que soit ce plan.*

La démonstration analytique de ce théorème par les coordonnées cartésiennes est difficile et compliquée. Elle a été donnée par Liouville dans un Mémoire (²) qui présente un très grand intérêt au point de vue de la théorie de l'élimination dans les équations algébriques, mais qui fait ressortir que le système cartésien ne constitue assurément pas la voie la plus naturelle pour atteindre analytiquement au théorème de Chasles.

---

(²) *Journal de Mathématiques de Liouville*, t. VI, p. 345. M. Fouret a fait voir, dans une Communication verbale à la Société, que la démonstration de Liouville pouvait être grandement simplifiée dans le cas du plan. Mais cette simplification qui consiste à montrer qu'on peut substituer à la courbe le système de ses asymptotes, et, par suite, aux points de contact des tangentes les points de rencontre mutuelle des asymptotes, ne subsiste pas pour le cas de l'espace.

Le système qui se présente alors à l'esprit est celui des *coordonnées parallèles* où un plan quelconque est déterminé par les segments $u$, $v$, $w$ qu'il détermine sur trois axes parallèles, donnés, à partir d'origines données A, B, C. Et il est très remarquable que c'est à ce système que, dès 1829, Chasles lui-même a recouru pour établir analytiquement son théorème ([1]).

**2.** La démonstration de Chasles (un peu alourdie dans le texte original par l'emploi inutile de la formule de Taylor généralisée) peut être réduite à ce qui suit :

L'équation en coordonnées parallèles d'une surface algébrique quelconque peut être écrite sous la forme

$$w^n + (au + bv + c)w^{n-1} + R_{n-2} = 0,$$

$R_{n-2}$ étant un polynôme du degré $n - 2$ en $w$. Dès lors, si nous donnons à $u$ et $v$ des valeurs déterminées quelconques et que $w_1$, $w_2$, ..., $w_n$ soient les valeurs correspondantes de $w$ données par l'équation précédente, nous avons

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_i = -(au + bv + c).$$

Cette équation exprime que, *si d'une droite prise dans le plan des uv on mène les n plans tangents à la surface, le plan* P *déterminé par cette droite et le centre des moyennes distances des points où ces n plans tangents coupent l'axe des w, passe par un point fixe.*

Si le plan des $uv$ est rejeté à l'infini, le plan P passe évidemment par le centre des moyennes distances des points de contact des $n$ plans tangents, lesquels sont devenus parallèles. Appelons G ce centre des moyennes distances, H le point fixe par lequel, en vertu du théorème précédent, passe constamment le plan P. Si nous considérons les plans tangents dans une position infiniment voisine, pour laquelle G viendrait en G', nous voyons que le mou-

---

([1]) *Correspondance mathématique et physique de Quetelet*, t. VI, p. 81. C'est là que se trouve émise pour la première fois l'idée des coordonnées parallèles, sur laquelle Chasles revient dans son grand Mémoire sur le principe de dualité (p. 635) et qui a été approfondie depuis, principalement par M. Schwering, par M. Franklin et par nous-même.

vement infiniment petit du plan P revient à une rotation instantanée autour de l'axe mené dans ce plan perpendiculairement à l'élément GG'. Le point H doit donc nécessairement se trouver sur cet axe, et, comme la direction de cet axe peut être prise d'une manière quelconque autour de G, il faut que H coïncide avec G. Ainsi donc, le point G est fixe, et le théorème est démontré.

3. Cette démonstration, que nous avions trouvée avant d'avoir connaissance de la Note de Chasles et qui est d'une forme un peu plus simple que celle de l'illustre géomètre, ne constitue point, quoi qu'en dise celui-ci, une démonstration *directe* de son théorème. En effet, l'éloignement à l'infini du plan des $uv$ enlève toute signification à l'équation sur laquelle repose le théorème préliminaire et fait qu'on ne peut en déduire la détermination analytique du point de Chasles, de sorte qu'en réalité, on établit par la marche précédente, au moyen des coordonnées parallèles, un théorème différent de celui de Chasles, pour en déduire ensuite celui-ci à l'aide de considérations géométriques d'ailleurs très faciles.

C'est la démonstration *directe* du théorème de Chasles par les coordonnées parallèles, avec la détermination analytique complète du point de Chasles au moyen de ces coordonnées, qui fait l'objet de la présente Note. On verra que, bien qu'exigeant plus de calcul que la précédente, cette démonstration est, en somme, très simple aussi ; elle fixe, en outre, d'une façon remarquable, la position du point de Chasles dans l'espace, au moyen des coefficients de l'équation de la surface donnée.

4. Donnons-nous donc, dans l'espace, trois axes parallèles quelconques $Au$, $Bv$, $Cw$.

Soit, par rapport à ces axes,

$$F(u, v, w) = 0 \tag{1}$$

l'équation, supposée de degré $n$, d'une surface algébrique quelconque. Pour mener à cette surface des plans tangents parallèles entre eux, nous adjoindrons, à l'équation (1) les suivantes,

$$\left\{\begin{aligned} w - u &= s, \\ w - v &= t. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Soient, pour des valeurs déterminées de $s$ et $t$, $(u_1, v_1, w_1)$, $(u_2, v_2, w_2)$, ..., $(u_n, v_n, w_n)$ les systèmes de solutions des équations (1) et (2). Le point de contact du plan tangent $(u_i, v_i, w_i)$ a pour équation

$$(u - u_i)\frac{\partial w_i}{\partial u_i} + (v - v_i)\frac{\partial w_i}{\partial v_i} - (w - w_i) = 0.$$

Le centre des moyennes distances des $n$ points de contact a donc pour équation

$$Lu + Mv + Nw + P = 0, \tag{3}$$

avec

$$(4) \left\{ \begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\dfrac{\partial w_i}{\partial u_i}}{\dfrac{\partial w_i}{\partial u_i} + \dfrac{\partial w_i}{\partial v_i} - 1}, \qquad M = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\dfrac{\partial w_i}{\partial v_i}}{\dfrac{\partial w_i}{\partial u_i} + \dfrac{\partial w_i}{\partial v_i} - 1}, \\ N &= -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\dfrac{\partial w_i}{\partial u_i} + \dfrac{\partial w_i}{\partial v_i} - 1}, \qquad P = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{u_i \dfrac{\partial w_i}{\partial u_i} + v_i \dfrac{\partial w_i}{\partial v_i} - w_i}{\dfrac{\partial w_i}{\partial u_i} + \dfrac{\partial w_i}{\partial v_i} - 1}. \end{aligned} \right.$$

La question d'Algèbre qu'il s'agit de résoudre consiste à faire voir que ces coefficients sont constants. Pour cela, substituons aux variables indépendantes $u$ et $v$ les variables $s$ et $t$. Nous avons

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial s}$$

ou, d'après (2),

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial s} - 1\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial s};$$

d'où

$$\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}}{\dfrac{\partial w}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial v} - 1} = \frac{\partial w}{\partial s}. \tag{5}$$

De même

$$\frac{\dfrac{\partial w}{\partial v}}{\dfrac{\partial w}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial v} - 1} = \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{6}$$

De (5) et (6), on déduit que

$$(7)\qquad \frac{1}{\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}-1}=\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial t}-1,$$

et, en tenant compte de (2), que

$$(8)\qquad \frac{u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w}{\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}-1}=-s\frac{\partial w}{\partial s}-t\frac{\partial w}{\partial t}+w.$$

Transformant les formules (4) au moyen de (5), (6), (7) et (8), en remarquant que $s$ et $t$ ont les mêmes valeurs pour les $n$ plans tangents, on a

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{ll} L=\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial w_i}{\partial s}, & M=\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial w_i}{\partial t},\\ N=\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n}\left(1-\frac{\partial w_i}{\partial s}-\frac{\partial w_i}{\partial t}\right), & P=\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n}\left(s\frac{\partial w_i}{\partial s}+t\frac{\partial w_i}{\partial t}-w_i\right).\end{array}\right.$$

Or, si l'on remplace, dans (1), $u$ et $v$ par leurs valeurs tirées de (2), on peut mettre le résultat obtenu sous la forme

$$(10)\qquad A_n w^n+(A_{n-1}s+B_{n-1}t+C_{n-1})w^{n-1}+R_{n-2}=0,$$

$R_{n-2}$ étant seulement du degré $n-2$ en $w$. Dès lors

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_i=-\frac{A_{n-1}}{A_n}s-\frac{B_{n-1}}{A_n}t-\frac{C_{n-1}}{A_n};$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial w_i}{\partial s}=-\frac{A_{n-1}}{A_n},\qquad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial w_i}{\partial t}=-\frac{B_{n-1}}{A_n},$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(1-\frac{\partial w_i}{\partial s}-\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)=\frac{A_{n-1}}{A_n}+\frac{B_{n-1}}{A_n}+n,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(s\frac{\partial w_i}{\partial s}+t\frac{\partial w_i}{\partial t}-w_i\right)=\frac{C_{n-1}}{A_n}.$$

Transformant au moyen de ces formules les valeurs (9) de L, M, N, P, et portant ces valeurs dans (3), on a, pour équation du point de Chasles,

$$(11)\qquad -A_{n-1}u - B_{n-1}v + (A_{n-1} + B_{n-1} + nA_n)w + C_{n-1} = 0,$$

et, comme les coefficients de cette équation sont constants, ce point est fixe.

La démonstration directe du théorème de Chasles est ainsi faite. Mais il est intéressant de la compléter en cherchant à exprimer les coefficients de l'équation (10) au moyen de ceux de l'équation (1) donnée. C'est ce que nous allons faire maintenant, d'abord par un calcul direct, puis par une marche moins élémentaire, mais plus élégante.

5. L'équation (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned} a_0 w^n + (a_1 u + b_1 v)w^{n-1} &+ (a_2 u^2 + b_2 uv + c_2 v^2)w^{n-2} + \ldots \\ + a'_0 w^{n-1} &+ (a'_1 u + b'_1 v)w^{n-2} \qquad + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_0^{(n)} = 0, \end{aligned}$$

la première ligne contenant l'ensemble homogène des termes de degré $n$ que nous représenterons par $F_n(u, v, w)$, la seconde, l'ensemble homogène des termes de degré $n-1$, ou $F_{n-1}(u, v, w)$, ....

Si maintenant nous remplaçons dans cette équation $u$ et $v$ par $w - s$ et $w - t$ et que nous développions par la formule du binôme, nous trouvons que

$$\begin{aligned} A_n &= a_0 + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2 + c_2) + \ldots \\ A_{n-1} &= -[a_1 + (2a_2 + b_2) + (3a_3 + 2b_3 + c_3) + \ldots], \\ B_{n-1} &= -[b_1 + (b_2 + 2c_2) + (b_3 + 2c_3 + 3d_3) + \ldots], \\ C_{n-1} &= a'_0 + (a'_1 + b'_1) + (a'_2 + b'_2 + c'_2) + \ldots, \end{aligned}$$

et nous en déduisons que

$$A_{n-1} + B_{n-1} + nA_n = na_0 + (n-1)(a_1 + b_1) + (n-2)(a_2 + b_2 + c_2) + \ldots,$$

Nous pouvons remarquer que les quatre dernières formules peuvent s'écrire

$$A_{n-1} = -\frac{\partial}{\partial u}F_n(1, 1, 1), \quad B_{n-1} = -\frac{\partial}{\partial v}F_n(1, 1, 1), \quad C_{n-1} = F_{n-1}(1, 1, 1),$$

$$A_{n-1} + B_{n-1} + nA_n = \frac{\partial}{\partial w}F_n(1, 1, 1).$$

Dès lors l'équation (11) du point de Chasles devient

$$(12)\quad u\frac{\partial}{\partial u}F_n(1,1,1)+v\frac{\partial}{\partial v}F_n(1,1,1)+w\frac{\partial}{\partial w}F_u(1,1,1)+F_{n-1}(1,1,1)=0.$$

Le point G représenté par cette équation se définit géométriquement comme suit : *Menons par le point* G, *à la direction des axes* A$u$, B$v$, C$w$, *une parallèle qui coupe le plan* ABC *des origines en* $g$ :

1° *Le point* $g$ *est le barycentre des points* A, B, C, *respectivement affectés des coefficients*

$$\frac{\partial}{\partial u}F_n(1,1,1),\quad \frac{\partial}{\partial v}F_n(1,1,1),\quad \frac{\partial}{\partial w}F_n(1,1,1).$$

2° *On a*

$$gG=\frac{-F_{n-1}(1,1,1)}{\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial w}\right)F_n(1,1,1)},$$

*ou, d'après le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes*

$$gG=-\frac{F_{n-1}(1,1,1)}{nF_n(1,1,1)}.$$

6. Voici maintenant l'autre méthode destinée à faire connaître les coefficients de l'équation (11).

Établissons d'abord un lemme.

Si $F(x,y,\ldots)$ est un polynôme de degré $n$ en $x$, $y$, ..., la formule de Taylor généralisée donne

$$(13)\qquad F(x+x_0w,y+y_0w,\ldots)=\sum_{p=0}^{p=n}K_pw^p,$$

où, sous forme symbolique,

$$(14)\qquad K_p=\frac{1}{p!}\left(x_0\frac{\partial}{\partial x}+y_0\frac{\partial}{\partial y}+\ldots\right)^pF(x,y,z).$$

Cette valeur de $K_p$ est développée suivant les puissances de $x_0$, $y_0$, .... Cherchons à la développer suivant les puissances de $x$, $y$, ...; pour cela, remarquons que le symbole

$$\left(x_0\frac{\partial}{\partial x}+y_0\frac{\partial}{\partial y}+\ldots\right)^p$$

étant additif, on a, en appelant $F_j(x,y,z)$ l'ensemble homogène des termes de degré $j$ de $F(x, y, z)$, et observant que pour $j < p$, le résultat de l'opération d'indice $p$ est nul,

$$K_p = \sum_{j=p}^{j=n} \frac{1}{p!}\left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + \ldots\right)^p F_j(x, y, z).$$

Mais, d'après une propriété connue des fonctions homogènes (propriété des *émanants*),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p!}\left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + \ldots\right)^p F_j(x, y, z) \\ &\quad = \frac{1}{(j-p)!}\left(x \frac{\partial}{\partial x_0} + y \frac{\partial}{\partial y_0} + \ldots\right)^{j-p} F_j(x_0, y_0, z_0); \end{aligned}$$

donc, en remplaçant $j - p$ par $i$,

$$K_p = \sum_{i=0}^{i=n-p} \left[\frac{1}{i!}\left(x \frac{\partial}{\partial x_0} + y \frac{\partial}{\partial y_0} + \ldots\right)^i F_{p+i}(x_0, y_0, z_0)\right]. \tag{15}$$

Notre lemme est établi. Appliquons-le au développement de $F(w - s, w - t, w)$ suivant les puissances de $w$, les coefficients étant mis sous forme de polynômes en $s$ et $t$. Ce développement sera donné par les formules (13) et (15), en y faisant

$$\begin{aligned} x &= -s, & y &= -t, & z &= 0, \\ x_0 &= 1, & y_0 &= 1, & z_0 &= 1. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} K_n &= F_n(1, 1, 1), \\ K_{n-1} &= -s \frac{\partial}{\partial u} F_n(1, 1, 1) - t \frac{\partial}{\partial v} F_n(1, 1, 1) + F_{n-1}(1, 1, 1); \end{aligned}$$

donc, en se référant aux notations de l'équation (10),

$$A_n = F_n(1, 1, 1), \qquad A_{n-1} = -\frac{\partial}{\partial u} F_n(1, 1, 1), \qquad B_{n-1} = -\frac{\partial}{\partial v} F_n(1, 1, 1),$$
$$C_{n-1} = F_{n-1}(1, 1, 1),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} A_{n-1} + B_{n-1} + n A_n &= n F_n(1, 1, 1) - \frac{\partial}{\partial u} F_n(1, 1, 1) - \frac{\partial}{\partial v} F_n(1, 1, 1) \\ &= \frac{\partial}{\partial w} F_n(1, 1, 1), \end{aligned}$$

en vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. Portant ces diverses valeurs dans (11), on retrouve l'équation (12).

7. Si

$$nF_n(1, 1, 1) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}\right)F_n(1, 1, 1) = 0,$$

on voit, d'après l'énoncé qui termine le n° 5, que le point $g$ est à l'infini du plan ABC et que la distance G$g$ est infiniment grande, c'est-à-dire que la surface représentée par l'équation (1) est tangente au plan de l'infini.

Ainsi, lorsque la somme des coefficients des termes du degré le plus élevé est nulle, la surface est tangente au plan de l'infini. On peut, sans difficulté, le voir directement. En particulier, si l'équation est du second degré, la quadrique qu'elle représente est un paraboloïde.

8. L'équation (12) du point de Chasles va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

*Le point de Chasles d'une surface algébrique est le pôle relativement à cette surface du plan de l'infini.*

Rappelons d'abord que le plan polaire P d'un point H par rapport à une surface algébrique est le lieu des centres harmoniques relativement à H des points où une droite menée par H rencontre la surface algébrique. Le point H est dit le *pôle* du plan P relativement à la surface.

Supposons que cette surface soit celle que représente l'équation (1). Si l'on rend cette équation homogène par l'introduction d'une variable $z$, en sorte que

$$F(u, v, w, z) = F_n(u, v, w) + zF_{n-1}(u, v, w) + \ldots + z^n F_0(u, v, w),$$

on a, pour l'équation du pôle du plan $(u_0, v_0, w_0, z_0)$,

$$u\frac{\partial F}{\partial u_0} + v\frac{\partial F}{\partial v_0} + w\frac{\partial F}{\partial w_0} + z\frac{\partial F}{\partial z_0} = 0.$$

Or nous avons, en posant $\frac{u_0}{w_0} = \lambda$, $\frac{v_0}{w_0} = \mu$, et remarquant que les dérivées partielles de $F_i(u, v, w)$ sont des fonctions homogènes de degré $i - 1$,

$$\frac{\partial F}{\partial u_0} = w_0^{n-1} \frac{\partial}{\partial u} F_n(\lambda, \mu, 1) + z_0 w_0^{n-2} \frac{\partial}{\partial u} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \dots$$
$$= w_0^{n-1} \left[ \frac{\partial}{\partial u} F_n(\lambda, \mu, 1) + \frac{z_0}{w_0} \frac{\partial}{\partial u} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \dots \right].$$

De même pour $\frac{\partial F}{\partial v_0}$ et $\frac{\partial F}{\partial w_0}$. Quant à $\frac{\partial F}{\partial z_0}$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial z_0} = w_0^{n-1} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + 2 z_0 w_0^{n-2} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \dots$$
$$= w_0^{n-1} \left[ F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + 2 \frac{z_0}{w_0} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \dots \right].$$

L'équation du pôle du plan $(u_0, v_0, w_0)$ peut donc s'écrire en remettant l'unité à la place de $z$,

$$L u + M v + N w + P = 0,$$

avec

$$L = \frac{\partial}{\partial u} F_n(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0} \frac{\partial}{\partial w} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \dots ,$$

$$M = \frac{\partial}{\partial v} F_n(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0} \frac{\partial}{\partial v} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial w} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \dots ,$$

$$N = \frac{\partial}{\partial w} F_n(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0} \frac{\partial}{\partial w} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial w} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \dots ;$$

$$P = F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \frac{2}{w_0} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \frac{3}{w_0^2} F_{n-3}(\lambda, \mu, 1) + \dots .$$

Pour le plan de l'infini, on a

$$\frac{1}{w_0} = 0, \qquad \lambda = 1, \qquad \mu = 1.$$

Les coefficients dont les valeurs viennent d'être écrites deviennent alors

$$L = \frac{\partial}{\partial u} F_n(1, 1, 1), \qquad M = \frac{\partial}{\partial v} F_n(1, 1, 1), \qquad N = \frac{\partial}{\partial w} F_n(1, 1, 1),$$
$$P = F_{n-1}(1, 1, 1).$$

On retrouve donc la même équation que celle (12) du point de Chasles, et le théorème sus-énoncé est démontré.

Au moyen d'une transformation homographique, on amène ce théorème à la forme suivante :

*Si par une droite quelconque, prise dans un plan $\pi$, on* *mène les n plans tangents à une surface algébrique de la $n^{ième}$ classe, le pôle du plan $\pi$ par rapport au système des points de contact de ces n plans tangents se confond avec le pôle du même plan par rapport à la surface.*

En particulier : *Le pôle d'un plan par rapport à une surface algébrique se confond avec le pôle du même plan par rapport au système des points de contact des plans tangents à la surface parallèles à ce plan.*