BULLETIN DE LA S. M. F.

C.- A. LAISANT

Sur la représentation analytique des figures planes et leur segmentation

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 123-131
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__123_0>

Sur la représentation analytique des figures planes, et leur segmentation; par M. C.-A. Laisant.

1. Lorsqu'on représente, en coordonnées cartésiennes, une courbe plane par une équation $y = f(x)$ ou $\varphi(x, y) = 0$, il y a lieu, pour obtenir tous les points de la courbe, de faire varier x de $-\infty$ à $+\infty$, et de construire les valeurs correspondantes de l'ordonnée y.

Si, pour certaines valeurs de x, comprises par exemple entre deux limites α et β, les valeurs correspondantes de y sont imaginaires, on est dans l'usage de dire qu'il n'y a aucun point de la courbe correspondant à ces valeurs de x. Mais, au point de vue analytique et si l'on veut généraliser entièrement les résultats que fournit l'Algèbre, il est certain que cette interprétation n'est pas complète et ne saurait satisfaire entièrement l'esprit.

J'ai eu occasion de montrer ailleurs (*Théorie et applications des équipollences,* Chap. VIII) que cette apparente discontinuité peut disparaître, et qu'à *toute* valeur réelle de x, on peut faire correspondre un point de la courbe, qui se complète ainsi par l'adjonction de branches adjointes.

Si en effet nous appelons θ l'angle des axes coordonnés, toute position d'un point M de la courbe, ayant pour coordonnées réelles x et y, est déterminée par l'équipollence

$$OM = x + y\varepsilon^{\theta}. \tag{1}$$

Il suffit de construire cette valeur pour toutes les valeurs de x, même lorsque y devient imaginaire, pour compléter la courbe comme nous venons de le dire.

Pour abréger, nous n'en développerons ici aucun exemple, tout en recommandant au lecteur de faire lui-même cette vérification sur quelques cas simples : ellipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ pour les valeurs de x supérieures à $+a$ ou inférieures à $-a$; hyperbole $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ pour les valeurs de x comprises entre $-a$ et $+a$; parabole $(y^2 = 2px)$ pour les valeurs négatives de x. Ces exercices, pour donner des résultats intéressants, doivent être généralement traités en coordonnées obliques.

2. Lorsque l'équation de la courbe est donnée sous la forme $y = f(x)$, cette valeur de y peut être uniforme ou multiforme, c'est-à-dire comporter une ou plusieurs déterminations. Dans ce dernier cas, rien n'empêche de particulariser, et de représenter seulement une partie de la courbe, en ne choisissant qu'une ou plusieurs des déterminations, et non toutes. Par exemple, en coordonnées rectangulaires, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ représente une circonférence, et $y = +\sqrt{a^2 - x^2}$ ne représenterait qu'une demi-circonférence seulement (et de même pour $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$). Mais de telles restrictions sont contraires à l'esprit de généralisation que comporte l'Algèbre, et par conséquent ne semblent guère recommandables.

3. Si l'on prend la représentation d'une courbe en coordonnées polaires $\rho = f(\omega)$, il y a lieu, pour obtenir tous les points réels, et nous ne nous occupons pour l'instant que de ceux-là, de faire varier l'angle polaire ω, variable indépendante, tantôt depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, tantôt d'une circonférence ou d'une fraction de circonférence, tantôt d'un nombre entier, plus ou moins grand, de circonférences.

Il est à remarquer aussi qu'un point quelconque a une infinité d'angles polaires $\omega \pm 2k\pi$, et non pas un seul. De là cette conséquence connue, qu'une même courbe peut être représentée par diverses équations, et aussi qu'une équation donnée peut représenter non pas seulement une courbe, mais une infinité de fois la courbe, quand on la prend dans toute sa généralité. Par exemple, $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}$ pour $e < 1$ représente une infinité d'ellipses superposées les unes aux autres, et non pas une ellipse seulement.

4. Une remarque pareille s'applique à la représentation des courbes, soit sous forme de deux équations fournissant les valeurs des coordonnées en fonction d'un paramètre arbitraire, soit, plus généralement, sous forme d'équipollences.

Ici, la variable est précisément ce paramètre arbitraire; c'est elle qu'il faut faire passer par toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$ si l'on veut conserver à l'Algèbre la généralité qu'elle doit avoir; et dès lors le résultat géométrique peut être très différent, suivant le choix qui aura été fait de ce paramètre, bien que le résultat de l'élimination paraisse le même.

Ainsi, en coordonnées rectangulaires, le système

$$(2) \qquad \begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \end{cases}$$

ou l'équipollence

$$\text{OM} = t \pm i\sqrt{1 - t^2}$$

représente la circonférence de centre O et de rayon un, plus l'axe des x (branche adjointe). La fonction y, ou la fonction géométrique OM, est multiforme.

Au contraire, le système

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$$

ou l'équipollence

$$\text{OM} \doteq \cos t + i \sin t$$

représente une infinité de circonférences superposées les unes sur les autres et pareilles à celle indiquée ci-dessus, sans aucune branche adjointe ; et la valeur OM est uniforme.

Cependant, le résultat de l'élimination de t est toujours, aussi bien dans le système (2) que dans le système (3),

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Le changement de variable qu'on peut opérer sur le paramètre arbitraire a donc une extrême importance.

Ces conséquences pourraient paraître un peu paradoxales si l'on ne se rappelait qu'en définitive une équipollence OM $= \varphi(t)$ ne représente pas autre chose qu'une transformation de figure, dont l'une, celle parcourue par t, est précisément l'origine des in-inclinaisons (ou l'axe des x). Quand on remplacera t par une autre variable t_1, telle que $t = \psi(t_1)$, l'équipollence nouvelle OM$= \varphi[\psi(t_1)] = \varphi_1(t_1)$ pourra donc fort bien ne pas représenter exactement, dans toutes ses parties, la même figure que précédemment, puisque c'est t_1 maintenant, et non plus t, dont l'extrémité doit parcourir l'axe des x, c'est-à-dire le champ des quantités réelles, et que la fonction φ_1 n'est plus la même que φ.

5. Ces remarques, d'une importance extrême pour arriver au

but essentiel que nous poursuivons dans cette Note, méritent d'être appuyées, pour plus de clarté, d'un nouvel exemple. Soit une hyperbole ayant pour centre l'origine, et pour axes, respectivement réel et imaginaire, $2a$ et $2b$.

Elle a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

L'équipollence de la courbe peut s'écrire

$$\text{OM} = at \pm ib\sqrt{t^2 - 1}. \tag{5}$$

Ici, la valeur de OM est double pour chaque valeur de t ; et, si nous faisons varier t de $-\infty$ à -1, et de $+1$ à $+\infty$, nous obtenons tous les points de la courbe. Entre $t = -1$ et $t = +1$, l'équipollence donne des points sur l'axe des x.

Il semble qu'on peut satisfaire aussi à l'équation de la courbe en posant $t = \text{Ch}\,u$, d'où $\sqrt{b^2 - 1} = \text{Sh}\,u$, ce qui donne l'équipollence

$$\text{OM} = a\,\text{Ch}\,u + b\,\text{Sh}\,u. \tag{6}$$

Or, si nous prenons cette nouvelle équipollence et si nous y faisons varier u de $-\infty$ à $+\infty$, nous n'aurons jamais que des valeurs positives pour $\text{Ch}\,u$, et, par conséquent, nous n'obtiendrons plus que la moitié de la courbe. Toute la branche répondant aux x négatifs sera laissée de côté.

On voit, par ce seul exemple, combien il est indispensable, quand on écrit l'équipollence d'une ligne, de bien se rendre compte de ce que cette équipollence représente. Ce peut être la ligne en question, dépourvue ou munie de branches adjointes; ou bien cette ligne superposée plusieurs fois ou une infinité de fois à elle-même ; ou enfin, comme on vient de le voir, une partie seulement de la ligne.

6. Les observations précédentes nous permettent d'obtenir très aisément un résultat qui semble avoir un réel intérêt au point de vue philosophique : c'est la possession d'une représentation analytique d'un arc, limité à volonté, d'une courbe donnée ou, si l'on veut, d'un *segment* de cette courbe.

En effet, l'équipollence de la courbe étant écrite sous la forme

$$(7) \qquad \mathrm{OM} = f(t),$$

considérons un arc ou segment curviligne M_0M_1, compris dans la représentation analytique fournie par l'équipollence, et tel que OM_0 réponde à la valeur t_0 et OM_1 à t_1.

Si nous changeons de variable, en remplaçant t par τ, de telle sorte que, lorsque t varie de t_0 à t_1, τ varie de $-\infty$ à $+\infty$, et, réciproquement, les conditions requises seront satisfaites.

On y arrive, par exemple, en écrivant

$$(8) \qquad t = \frac{t_0 + t_1}{2} + \frac{t_1 - t_0}{2}\,\mathrm{Th}\,\tau,$$

puisque $\mathrm{Th}\,\tau$ varie de -1 à $+1$ quand τ varie de $-\infty$ à $+\infty$; ou, plus simplement peut-être, par la formule

$$(9) \qquad t = \frac{t_0 + t_1 e^\tau}{1 + e^\tau}.$$

L'équipollence obtenue par la substitution de cette valeur de t dans la relation (7), c'est-à-dire

$$(10) \qquad \mathrm{OM} = \varphi(\tau),$$

représentera donc l'arc limité M_0M_1 lorsque τ variera de $-\infty$ à $+\infty$.

C'est à ce problème, de la représentation analytique d'une partie d'une courbe, que nous proposons d'appliquer le mot de *segmentation*.

7. Si l'on veut représenter toute la partie d'une courbe, à partir d'un point donné M_0 jusqu'au delà de toute limite, ce qui donnera, suivant les cas, des semi-branches infinies, il faudra que

$$\begin{array}{ll} \text{pour } t \text{ variant de } & t_0 \text{ à } +\infty, \\ \qquad \tau \text{ varie de } & -\infty \text{ à } +\infty, \end{array}$$

ou bien que

$$\begin{array}{ll} \text{pour } t \text{ variant de } & -\infty \text{ à } t_0, \\ \qquad \tau \text{ varie de } & -\infty \text{ à } +\infty. \end{array}$$

On obtiendra ces deux résultats, respectivement, par les relations

$$(11) \qquad t = t_0 + e^{\tau},$$

$$(12) \qquad t = t_0 - e^{-\tau}.$$

8. *Équipollence d'un segment de droite.* — Soit AB un segment rectiligne donné. L'équipollence de la droite indéfinie peut être supposée écrite

$$OM = OA + t.AB,$$

si bien que A correspond à $t = 0$, et B à $t = 1$.

La formule (9) nous donnera donc $t = \frac{e^{\tau}}{1 + e^{\tau}}$, et l'équipollence du segment AB sera

$$(13) \qquad OM = \frac{OA + e^{\tau} OB}{1 + e^{\tau}}.$$

9. *Équipollence d'une semi-droite.* — La semi-droite AX, partant de A dans la direction AB, a pour équipollence

$$(14) \qquad OM = OA + e^{\tau}.AB.$$

La semi-droite AX′, de sens contraire, est représentée par

$$(15) \qquad OM = OA - e^{-\tau} AB.$$

C'est ce que les formules (11) et (12) font ressortir immédiatement.

10. *Équipollence d'une figure polygonale.* — Connaissant les équipollences de plusieurs segments de droites, on obtiendra l'équipollence du système en les multipliant les unes par les autres, après avoir rendu le second membre nul. La fonction OM qui détermine un point de la figure devient alors multiforme.

Ainsi, l'équipollence d'un angle ABC dont les côtés BA, BC sont limités sera

$$(16) \qquad \left(OM - \frac{OA + e^{\tau} OB}{1 + e^{\tau}}\right)\left(OM - \frac{OC + e^{\tau}.OB}{1 + e^{\tau}}\right) = 0;$$

on peut l'écrire aussi, en prenant le sommet B pour origine,

$$BM^2 - \frac{BA + BC}{1 + e^{\tau}} BM + \frac{BA.BC}{(1 + e^{\tau})^2} = 0.$$

On formerait de même l'équipollence d'un triangle, d'un polygone, avec ou sans ses diagonales, enfin d'une figure quelconque comprenant des segments de droites.

11. *Équipollence d'un quadrant.* — Nous aurons l'équipollence du premier quadrant, par exemple, de la circonférence de centre O et de rayon a, en écrivant

$$\mathrm{OM} = a\varepsilon^{t}$$

et en faisant dans la formule (9) $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne, par substitution dans l'équipollence ci-dessus,

$$\mathrm{OM} = a\varepsilon^{\frac{\pi}{2}\frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}}}. \tag{17}$$

Les deuxième, troisième et quatrième quadrants auraient respectivement pour équipollences

$$\mathrm{OM} = \quad ia\varepsilon^{\frac{\pi}{2}\frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}}},$$

$$\mathrm{OM} = -\ a\varepsilon^{\frac{\pi}{2}\frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}}},$$

$$\mathrm{OM} = -\ ia\varepsilon^{\frac{\pi}{2}\frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}}}.$$

12. *Équipollence d'une rosace.* — Nous appelons ici rosace, en général, la figure obtenue en faisant tourner une figure F_1 autour d'un centre O, d'un angle $\frac{2\pi}{n}$, puis encore d'un angle égal, et ainsi de suite, et en considérant l'ensemble des n figures F_1, F_2, ..., F_n ainsi obtenues.

Si

$$\mathrm{OM} = f(\tau) = \mathrm{T}$$

est l'équipollence de la figure F_1, celles des figures F_2, F_3, ..., F_n seront

$$\mathrm{OM} = \mathrm{T}\varepsilon^{\frac{2\pi}{n}},$$

$$\mathrm{OM} = \mathrm{T}\varepsilon^{\frac{4\pi}{n}},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$\mathrm{OM} = \mathrm{T}\varepsilon^{\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

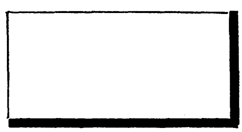
Or, les coefficients de T étant justement les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, il s'ensuit que nous aurons, en faisant le produit de toutes ces équipollences,

$$(\mathrm{OM})^n - \mathrm{T}^n = 0. \tag{18}$$

13. Ces exemples nous paraissent suffisants pour bien faire comprendre l'esprit de la méthode représentative que nous proposons. Cette méthode permet, étant donnée une figure plane, aussi compliquée que l'on voudra et composée de lignes, d'imaginer et de construire une équipollence qui représentera exactement toutes les parties de ce dessin, à l'exclusion de toute autre.

Il y a plus ; si dans un dessin il se trouve des lignes de forces différentes, notre notation permet encore de faire ressortir cette circonstance, avec toutes les nuances qu'on désirera. Il suffit de considérer comme traits du premier ordre (ou les plus fins) ceux qui sont parcourus une seule fois ; du second ordre, ceux qui sont parcourus deux fois ; et ainsi de suite. Alors toute équipollence $\mathrm{OM} - \mathrm{T} = 0$ d'une figure tracée avec un trait d'ordre p donnera lieu, dans l'équipollence finale, au facteur $(\mathrm{OM} - \mathrm{T})^p$.

Comme exemple d'une extrême simplicité, nous représenterons la figure rectangulaire ci-contre, figurant une planchette éclairée



par un rayon oblique venant d'en haut et à gauche.

Si a est la base et b la hauteur du rectangle, nous pourrons écrire (8)

$$\left(\mathrm{OM} - \frac{ae^\tau}{1+e^\tau}\right)^2 \left(\mathrm{OM} - a - \frac{ibe^\tau}{1+e^\tau}\right)^2 \left(\mathrm{OM} - ib - \frac{a}{1+e^\tau}\right)\left(\mathrm{OM} - \frac{ib}{1+e^\tau}\right) = 0.$$

Il serait également possible, et c'est par cette remarque que nous terminerons, d'étendre sans plus de difficulté ces résultats à l'espace, en prenant l'équipollence d'une ligne sous la forme

$$\mathrm{OM} = f(t),$$

OM représentant ici un vecteur, et en suivant une marche exactement pareille à celle que nous avons indiquée.

Par exemple, les coordonnées de A et de B étant x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 l'équipollence du segment AB pourra s'écrire

$$\mathrm{OM} = \frac{(x_1 + y_1 e^{\tau})\mathrm{OD}_1 + (x_2 + y_2 e^{\tau})\mathrm{OD}_2 + (x_3 + y_3 e^{\tau})\mathrm{OD}_3}{1 + e^{\tau}},$$

OD_1, OD_2, OD_3 étant trois lignes de longueur égale à l'unité dirigées respectivement suivant les axes coordonnés.