Bulletin de la S. M. F.

C.-A. Laisant

Propriété des surfaces algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 141-144
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__141_1>

Propriété des surfaces algébriques; par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 4 décembre 1889.)

Dans l'une des dernières séances de la Société mathématique, M. Fouret, après avoir donné une démonstration fort simple d'un beau théorème sur l'élimination dû à Liouville, en a déduit, à l'aide de considérations empruntées à la Mécanique, une propriété générale de toutes les courbes algébriques, dont M. Humbert avait fait antérieurement l'objet d'une Communication, et que l'on peut énoncer ainsi :

Le lieu des points tels que la somme des carrés des normales menées de chacun de ces points à une courbe algébrique soit constante est une conique.

Lorsqu'on fait varier la somme donnée, les coniques obtenues restent concentriques et homothétiques.

Le centre commun de toutes ces coniques est un point remarquable du plan de la courbe; il jouit de cette propriété, que la somme des carrés des normales qu'on peut mener de ce point à la courbe est minimum.

Une propriété tout à fait semblable a, paraît-il, été établie par M. Humbert pour les surfaces algébriques, au moyen d'artifices ingénieux qui évitent les calculs très compliqués auxquels la question semble au premier abord devoir conduire.

Le but de la présente Note est de démontrer cette remarquable propriété des surfaces algébriques par un procédé purement analytique, sans recourir à aucune considération étrangère à la question elle-même.

Pour y parvenir, je rappellerai tout d'abord la proposition suivante, relative à la théorie de l'élimination :

Si l'on a, outre plusieurs inconnues, en nombre quelconque $x, y, z, t, u, \ldots$, plusieurs équations, en nombre inférieur à celui des inconnues,

$$
\begin{gathered}
f_1(x, y, z, t, u, \ldots) = 0, \\
f_2(x, y, z, t, u, \ldots) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_p(x, y, z, t, u, \ldots) = 0,
\end{gathered}
$$

et si l'on suppose que les degrés de ces équations, par rapport à L'ENSEMBLE *des inconnues (et non pas seulement à telles ou telles d'entre ces inconnues) soient respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_p$, le degré de l'équation finale, par rapport à l'ensemble des inconnues restantes, lorsqu'on éliminera $p-1$ des inconnues, sera au plus égal à $n_1 n_2 \ldots n_p$* [1].

Cette propriété admise, arrivons à la question géométrique que nous avons en vue. Soit

$$
f(x, y, z) = 0 \tag{1}
$$

l'équation d'une surface algébrique.

Considérons un point M, dont les coordonnées soient α, β, γ,

---

(1) M. Fouret a donné, il y a quelques années, dans le *Bulletin*, une démonstration de ce théorème basée sur le principe de correspondance (t. II, p. 127).

et menons par ce point les normales à la surface. On voit que les points d'incidence de ces normales seront donnés par les intersections communes de la surface (1) et des surfaces représentées par les équations

$$(2)\qquad \frac{f'_x}{x-\alpha}=\frac{f'_y}{y-\beta},\qquad \frac{f'_x}{x-\alpha}=\frac{f'_z}{z-\gamma}.$$

Si l'on met ces équations (2) sous forme entière, il est visible qu'elles sont du même degré n que la surface (1), soit, en général, par rapport à chacune des lettres x, y, z, soit par rapport à *l'ensemble* des lettres $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$.

Si donc, entre ces trois équations (1), (2), nous éliminons y et z, par exemple, l'équation résultante, de degré n^3 en x, sera également de degré n^3 par rapport à l'ensemble des lettres x, α, β, γ, d'après la propriété énoncée ci-dessus. Nous pouvons, en conséquence, l'écrire

$$(3)\qquad x^{n^3}+F_1(\alpha,\beta,\gamma)x^{n^3-1}+F_2(\alpha,\beta,\gamma)x^{n^3-2}+\ldots=0,$$

$F_1, F_2, \ldots$ représentant des fonctions de α, β, γ dont le degré est égal à l'indice.

De même, l'élimination de z, x, puis de x, y, nous donnerait

$$(4)\qquad y^{n^3}+G_1(\alpha,\beta,\gamma)y^{n^3-1}+G_2(\alpha,\beta,\gamma)y^{n^3-2}+\ldots=0,$$

$$(5)\qquad z^{n^3}+H_1(\alpha,\beta,\gamma)z^{n^3-1}+H_2(\alpha,\beta,\gamma)z^{n^3-2}+\ldots=0.$$

Ces trois équations résolues donneraient les coordonnées des points d'incidence des n^3 normales issues du point M.

La somme k^2 des carrés des distances de M à ces n^3 points d'incidence est

$$\Sigma[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]$$

ou

$$n^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2\alpha\Sigma x-2\beta\Sigma y-2\gamma\Sigma z+\Sigma x^2+\Sigma y^2+\Sigma z^2.$$

Or les équations (3), (4), (5) nous montrent qu'on a

$$\Sigma x=-F_1(\alpha,\beta,\gamma),\qquad \Sigma y=-G_1(\alpha,\beta,\gamma),\qquad \Sigma z=-H_1(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$\Sigma x^2=F_1^2-2F_2=J_2(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$\Sigma y^2=L_2(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$\Sigma z^2=P_2(\alpha,\beta,\gamma).$$

L'équation du lieu du point M est donc

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & n^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2\alpha F_1(\alpha,\beta,\gamma)+2\beta G_1(\alpha,\beta,\gamma) \\ & \qquad +2\gamma H_1(\alpha,\beta,\gamma)+J_2(\alpha,\beta,\gamma)+L_2(\alpha,\beta,\gamma)+P_2(\alpha,\beta,\gamma)=k^2. \end{aligned} \right.$$

Le lieu cherché est donc une surface du second ordre. Lorsqu'on fait varier k^2, le centre reste invariable, de même que les directions et les rapports mutuels des axes.

Si nous écrivons l'équation de cette surface sous la forme

$$(7)\qquad S_2(\alpha,\beta,\gamma)=k^2,$$

et si α_0, β_0, γ_0 représentent les coordonnées du centre, il est clair que le minimum de la somme des carrés des normales, qui correspond précisément à ce centre, est

$$S_2(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0).$$

Ainsi se trouve établie, par une analyse bien simple, la proposition suivante, relative aux surfaces algébriques :

Le lieu des points tels que la somme des carrés des normales menées de chacun de ces points à une surface algébrique soit constante est une surface du second ordre.

Lorsqu'on fait varier la somme donnée, les surfaces du second ordre obtenues restent concentriques et homothétiques.

Le centre commun de toutes ces surfaces jouit de cette propriété, que la somme des carrés des normales qu'on peut mener de ce point à la surface algébrique est minimum.

Il serait intéressant d'étudier les particularités diminuant le nombre n^3 des normales qu'on peut mener à la surface d'un point quelconque. J'ai voulu me borner, dans cette Note, à l'examen de la propriété générale.