BULLETIN DE LA S. M. F.

FÉLIX LUCAS

Nature des racines de l'équation du quatrième degré

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 145-149

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__145_0>

Nature des racines de l'équation du quatrième degré;
par M. Félix Lucas.

Prenons l'équation du quatrième degré sous la forme

$$az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 3dz + e = 0. \tag{1}$$

En identifiant son premier membre avec celui de l'équation

$$a(z^2 + 2mz + n)(z^2 + 2pz + q) = 0 \tag{2}$$

et posant

$$n + q - 2mp = 6\lambda, \tag{3}$$

on obtient les cinq équations

$$\left\{\begin{array}{ll} m + p = \dfrac{2b}{a}, & mp = \dfrac{c}{a} - \lambda, \\ n + q = 2\left(\dfrac{c}{a} + 2\lambda\right), & nq = \dfrac{c}{a}, \\ \multicolumn{2}{c}{mq + np = \dfrac{2d}{a},} \end{array}\right. \tag{4}$$

entre lesquelles on peut éliminer facilement les auxiliaires m, n, p, q. On trouve ainsi la résolvante du troisième degré en λ, à laquelle on peut donner l'une ou l'autre des formes suivantes

$$\begin{vmatrix} a & b & c + 2a\lambda \\ b & c - a\lambda & d \\ c + 2a\lambda & d & e \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

$$4a^3\lambda^3 - a(ae - 4bd + 3c^2)\lambda + \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0. \tag{5'}$$

Posons, pour simplifier les écritures qui vont suivre,

$$\left\{\begin{array}{l} 4a^2\mathrm{P} = -(ae - 4bd + 3c^2), \\ 4a^3\mathrm{Q} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & e & f \end{vmatrix} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3. \end{array}\right. \tag{6}$$

L'équation résolvante deviendra

$$\lambda^3 + \mathrm{P}\lambda + \mathrm{Q} = 0. \tag{7}$$

Elle admet trois racines λ', λ'', λ''', au moyen desquelles on peut former les six rapports

$$(8)\qquad \frac{\lambda'}{\lambda''},\quad \frac{\lambda''}{\lambda'},\quad \frac{\lambda''}{\lambda'''},\quad \frac{\lambda'''}{\lambda''},\quad \frac{\lambda'''}{\lambda'},\quad \frac{\lambda'}{\lambda'''},$$

et qui satisfont à la relation

$$(9)\qquad \lambda'+\lambda''+\lambda'''=0.$$

Si l'on désigne un quelconque des six rapports (le premier, par exemple) par r, le système de ces rapports peut s'écrire

$$(10)\qquad r,\quad \frac{1}{r},\quad -\frac{1}{1+r},\quad -(1+r),\quad -\frac{1+r}{r},\quad -\frac{r}{1+r}.$$

Leur produit est égal à 1, et leur somme est égale à -3. Ce système de rapports n'est pas modifié si l'on change r soit en $\frac{1}{r}$, soit en $-(1+r)$; il en résulte que les six rapports sont les racines de l'équation

$$(11)\qquad r^6+3r^5+(H+3)r^4+(2H+1)r^3+(H+3)r^2+3r+1=0,$$

qui peut ainsi s'écrire sous les deux formes suivantes :

$$(11\ bis)\qquad [r(1+r)]^3+H[r(1+r)]^2+3[r(1+r)]+1=0,$$

$$(11\ ter)\qquad (r^2+r+1)^3+(H-3)r^2(1+r)^2=0,$$

et dans laquelle entre un paramètre H à déterminer. Or l'équation (11 *bis*) donne

$$(12)\qquad H=\lambda'\lambda''\lambda'''\left(\frac{1}{\lambda'^3}+\frac{1}{\lambda''^3}+\frac{1}{\lambda'''^3}\right).$$

On a, d'autre part, par l'équation (7), en tenant compte de (9),

$$(13)\qquad \frac{P^3}{Q^2}=\lambda'\lambda''\lambda'''\left(\frac{1}{\lambda'}+\frac{1}{\lambda''}+\frac{1}{\lambda'''}\right)^3=H-3.$$

Cela posé, désignons par z_1, z_2, z_3, z_4 les racines de l'équation (1); nous aurons, d'après les formules (2) et (3), pour valeurs des trois racines de la résolvante,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} 4\lambda' &= z_1z_3+z_2z_4-6\frac{c}{a},\\ 4\lambda'' &= z_1z_4+z_2z_3-6\frac{c}{a},\\ 4\lambda''' &= z_1z_2+z_3z_4-6\frac{c}{a}.\end{aligned}\right.$$

Les six rapports anharmoniques des racines de l'équation (1) peuvent s'exprimer très simplement au moyen de ces trois racines. Il est, de plus, à remarquer que ces six valeurs correspondent une à une avec celles des six rapports (8); on a, par exemple, en regard de

$$r = \frac{\lambda'}{\lambda''}$$

le rapport anharmonique

$$\rho = \frac{\lambda' - \lambda'''}{\lambda'' - \lambda'''} = \frac{2r+1}{r+2}.$$

La corrélation des r et des ρ s'exprime par l'équation homographique

$$(15) \qquad \rho r + 2\rho - 2r - 1 = 0.$$

La formule (13) et l'équation (11 *ter*) donnent

$$(16) \qquad \frac{P^3}{Q^2} = -\frac{(r^2+r+1)^3}{r^2(1+r)^2};$$

en remplaçant r par $\frac{2\rho - 1}{2 - \rho}$, on trouve

$$(17) \qquad \frac{P^3}{Q^2} = -27\frac{(\rho^2 - \rho + 1)^2}{(\rho+1)^2(\rho-2)^2(2\rho-1)^2}.$$

On sait que le rapport anharmonique de quatre quantités z ne change pas si l'on remplace ces quantités par d'autres ayant avec elles la relation homographique

$$(18) \qquad \alpha z z' + \beta z + \gamma z' + \delta = 0;$$

s'il s'agit des quatre racines de l'équation (1), leur transformation peut s'obtenir en remplaçant z par sa valeur en z' dans le premier membre de l'équation, et multipliant ensuite par $(\alpha z' + \beta)^4$ pour ramener à la forme entière. Le résultat serait le même si, dans la forme

$$(19) \qquad a z^4 + 4 b z^3 \zeta + 6 c z^2 \zeta^2 + 4 d z \zeta^3 + e \zeta^4,$$

on remplaçait z par $-(\gamma\zeta + \delta)$ et ζ par $\alpha\zeta + \beta$, en faisant ensuite $\zeta = 1$; il en résulte que les rapports anharmoniques ρ sont des invariants absolus de la forme (19); il en est de même, par conséquent, de l'expression $\frac{P^3}{Q^2}$ et des rapports r des racines de l'équation résolvante.

Les six valeurs d'un rapport anharmonique

$$(20) \qquad \rho,\ \frac{1}{\rho},\ \frac{1}{1-\rho},\ 1-\rho,\ \frac{\rho}{\rho-1},\ \frac{\rho-1}{\rho}$$

sont toutes réelles ou toutes imaginaires : la condition de leur réalité est la même que celle de la réalité des r et, par conséquent, que celle de la réalité des λ (si Q n'est pas nul). Lorsque l'équation donnée (1) du quatrième degré a ses coefficients réels, la condition de réalité des rapports anharmoniques de ses quatre racines est

$$(21) \qquad 4P^3 + 27Q^2 < 0.$$

Or, pour que les rapports anharmoniques des quatre affixes z_1, z_2, z_3, z_4 soient réels, il faut et il suffit que les points racines correspondants soient en ligne droite ou soient les sommets d'un quadrilatère inscriptible dans une circonférence.

Cela posé, admettons que les quatre racines de l'équation (1) soient inégales. Si elles sont toutes réelles, elles déterminent quatre points en ligne droite sur l'axe des x; si elles sont toutes imaginaires (conjuguées deux à deux), elles forment un trapèze isoscèle inscriptible dans une circonférence; dans les deux cas leurs rapports anharmoniques sont réels; par conséquent l'inégalité

$$(21) \qquad 4P^3 + 27Q^2 < 0$$

indique que les racines de l'équation (1) sont toutes réelles ou toutes imaginaires.

Inversement, l'inégalité

$$(22) \qquad 4P^3 + 27Q^2 > 0$$

doit indiquer que l'équation a deux racines réelles et deux imaginaires; dans ce cas, en effet, les quatre racines déterminent les sommets d'un quadrilatère qui n'est pas, en général, inscriptible dans une circonférence. Ce quadrilatère devient inscriptible s'il est birectangle; les rapports anharmoniques ρ ainsi que les rapports r deviennent alors réels, bien que deux racines de l'équation λ restent imaginaires en vertu de l'inégalité (22). Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que l'équation en λ ait une racine nulle; on a donc $Q = 0$ et $P > 0$: les quatre racines z_1, z_2, z_3, z_4 forment alors deux couples harmoniques.

L'égalité

$$4P^3 + 27Q^2 = 0 \tag{23}$$

représente la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation en λ ait deux racines égales; les formules (14) indiquent que c'est également la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation donnée (1) ait deux racines égales.