BULLETIN DE LA S. M. F.

M. FOUCHÉ

Sur une simplification à un calcul de Lamé relatif à un changement de variable

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 149-152
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__149_1>

Sur une simplification à un calcul de Lamé relatif à un changement de variable; par M. Maurice Fouché.

Dans son travail sur les coordonnées elliptiques, Lamé s'est trouvé conduit à traiter le problème général suivant :

Si l'on remplace les coordonnées rectangulaires x, y, z *d'un point de l'espace par les coordonnées curvilignes* ρ, ρ_1, ρ_2 *définies au moyen des trois équations*

$$(1)\qquad \begin{cases} f\,(x, y, z) = \rho, \\ f_1(x, y, z) = \rho_1, \\ f_2(x, y, z) = \rho_2, \end{cases}$$

qui représentent trois surfaces orthogonales, *et si* V *est une fonction quelconque de* x, y, z, *on propose d'exprimer la quantité*

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2},$$

au moyen des dérivées par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2 *des trois quantités* h, h_1, h_2 *définies par les équations*

$$(2)\qquad \begin{cases} h^2 = \left(\dfrac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\rho}{dz}\right)^2, \\ h_1^2 = \left(\dfrac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\rho_1}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\rho_1}{dz}\right)^2, \\ h_2^2 = \left(\dfrac{d\rho_2}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\rho_2}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\rho_2}{dz}\right)^2. \end{cases}$$

La solution qu'il en donne, et qui se trouve reproduite dans le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, exige une série de calculs un peu longs. Je suis parvenu au même résultat d'une manière beaucoup plus rapide, qu'il m'a paru intéressant de faire connaître, d'autant plus que cette question, dans le cas particulier où les trois surfaces ρ, ρ_1, ρ_2 sont des quadriques homofocales, a fait partie du concours d'agrégation il y a quelques années (1883).

Je rappellerai d'abord les principaux points de la méthode de Lamé.

1° Si l'on différentie l'équation

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dV}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dV}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx},$$

et les équations analogues relatives à $\frac{dV}{dy}$ et $\frac{dV}{dz}$, on voit facilement que ΔV se met sous la forme

$$\Delta V = h^2\frac{d^2V}{d\rho^2} + h_1^2\frac{d^2V}{d\rho_1^2} + h_2^2\frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{dV}{d\rho}\Delta\rho + \frac{dV}{d\rho_1}\Delta\rho_1 + \frac{dV}{d\rho_2}\Delta\rho_2,$$

de sorte qu'il suffit de calculer les expressions $\Delta\rho$, $\Delta\rho_1$, $\Delta\rho_2$.

2° Pour y arriver, on commence par chercher entre $\frac{d\rho}{dx}, \frac{d\rho}{dy}, \dots$ et $\frac{dx}{d\rho}, \frac{dy}{d\rho}, \dots$ des relations qu'on obtient en différentiant totalement les équations (1) et en tenant compte de ce que les surfaces sont orthogonales. On arrive ainsi aux équations

$$(3) \qquad h^2\frac{dx}{d\rho} = \frac{d\rho}{dx}, \qquad h^2\frac{dy}{d\rho} = \frac{d\rho}{dy}, \qquad h^2\frac{dz}{d\rho} = \frac{d\rho}{dz}$$

et deux autres analogues.

3° Si maintenant on différentie successivement les équations qui expriment que les surfaces sont orthogonales, savoir

$$\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dz} = 0$$

et deux autres analogues, par rapport à x, y, z, et si l'on remplace dans les équations résultantes les dérivées $\frac{d\rho}{dx}, \dots$ par leurs valeurs tirées de (3), on obtient le résultat remarquable

$$(4)\qquad h^2 \frac{d \frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho} = - h_1^2 \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1},$$

avec huit autres équations qui procèdent de celles-ci par les permutations des indices ou des lettres x, y, z.

4° C'est à partir de ce point que la méthode que je propose commence à différer de celle de Lamé. Lamé formait des équations linéaires contenant les trois inconnues $\Delta\rho$, $\Delta\rho_1$, $\Delta\rho_2$: je vais calculer directement chacune d'elles. Si l'on considère $\frac{d\rho}{dx}$ comme une fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, on aura

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho_2} \frac{d\rho_2}{dx}$$

ou, d'après (4),

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{d\rho}{dx} \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho} - \frac{h^2}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d \frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho} - \frac{h^2}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dx} \frac{d \frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho}.$$

On aura deux équations analogues donnant $\frac{d^2\rho}{dy^2}$ et $\frac{d^2\rho}{dz^2}$; en ajoutant ces trois équations, on a immédiatement

$$\Delta\rho = \frac{1}{2} \frac{dh^2}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{h_1^2} \frac{dh_1^2}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{h_2^2} \frac{dh_2^2}{d\rho},$$

ce qui est le résultat cherché. On le met facilement sous la forme habituelle. On a successivement

$$\Delta\rho = h^2 \left(\frac{1}{h} \frac{dh}{d\rho} - \frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho} - \frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{d\rho} \right),$$

$$\Delta\rho = h^2 \frac{d}{d\rho} (\log h - \log h_1 - \log h_2)$$

et enfin

$$\Delta\rho = h^2 \frac{d \log \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho}.$$

On aurait de même

$$\Delta\rho_1 = h_1^2 \frac{d \log \dfrac{h_1}{h_2 h}}{d\rho_1},$$

$$\Delta\rho_2 = h_2^2 \frac{d \log \dfrac{h_2}{h h_1}}{d\rho_2},$$

qui sont bien les formules de Lamé.