BULLETIN DE LA S. M. F.

BÉGHIN.

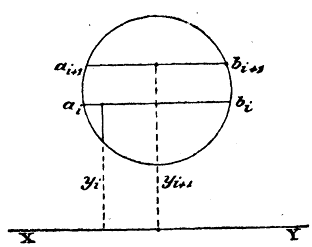
Méthode d'approximation pour calculer le moment d'inertie et la position du centre de gravité d'une aire plane

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 152-154
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__152_1>

Méthode d'approximation pour calculer le moment d'inertie et la position du centre de gravité d'une aire plane ; par M. Béghin.

On emploie généralement, pour faire ces calculs, les formules de Thomas Simpson, dont l'application est assez pénible, à cause des nombreuses multiplications qu'elles nécessitent ; néanmoins, comme elles supposent le même mode de division, elles peuvent présenter des avantages, lorsque la courbe proposée n'est pas tracée.

Mais, lorsque la courbe est tracée, ce qui est le cas général, et que par conséquent la mesure des segments déterminés par des



parallèles à l'axe des moments ne présente aucune difficulté, on peut opérer beaucoup plus simplement.

L'aire proposée étant supposée partagée par des parallèles à l'axe XY, considérons deux parallèles consécutives $a_i b_i$ et $a_{i+1} b_{i+1}$.

Posons

$$a_i b_i = x_i,$$
$$a_{i+1} b_{i+1} = x_{i+1},$$

et désignons par y_i et y_{i+1} leurs distances à XY.

Si nous assimilons la bande $a_i b_i a_{i+1} b_{i+1}$ à un trapèze, son moment d'inertie sera compris entre ceux des deux rectangles qui ont pour bases, l'un x_i et l'autre x_{i+1} et pour hauteur $(y_{i+1} - y_i)$. Étendons à chacun d'eux l'intégrale double

$$\int\int y^2 dx\, dy\,;$$

nous trouvons

$$\frac{1}{3}(y_{i+1}^3 - y_i^3)\, x_i$$

et

$$\frac{1}{3}(y_{i+1}^3 - y_i^3)\, x_{i+1},$$

Le moment d'inertie du trapèze $a_i b_i a_{i+1} b_{i+1}$, qui est compris entre ces deux valeurs, est sensiblement égal à

$$\frac{1}{3}(y_{i+1}^3 - y_i^3)\frac{x_i + x_{i+1}}{2},$$

et nous aurons, pour le moment cherché,

$$I = \frac{1}{3}\sum_0^n (y_{i+1}^3 - y_i^3)\frac{x_{i+1} + x_i}{2}.$$

Assujettissons maintenant le mode de division à être tel que les ordonnées successives soient les racines cubiques de nombres en progression arithmétique de raison Δ; nous aurons

$$I = \frac{\Delta}{3}\sum \frac{x_{i+1} + x_i}{2} = \frac{\Delta}{3}\left(\frac{x_0 + x_n}{2} + x_1 + \ldots + x_{n-1}\right).$$

Une méthode analogue peut évidemment s'appliquer aux centres de gravité ; U désignant l'aire de la courbe proposée, H la distance de son centre de gravité à l'axe des moments, nous avons

$$UH = \int\int y\, dx\, dy,$$

et, pour le trapèze $a_i b_i a_{i+1} b_{i+1}$,

$$\frac{1}{2}(y_{i+1}^2 - y_i^2)\frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

On prendra pour ordonnées successives les racines carrées de nombres en progression arithmétique, et l'on aura

$$UH = \frac{\Delta}{2}\left(\frac{x_0 + x_n}{2} + x_1 + \ldots + x_{n-1}\right).$$

Il est essentiel de remarquer que chacune de ces deux échelles peut être faite une fois pour toutes sur du papier à calquer que l'on applique sur le dessin. Dès lors ce calcul ne présente pas plus de difficultés que celui d'une aire plane.