BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. BIOCHE

Sur le ds^2 des surfaces réglées

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 91-95
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__91_0>

Sur le ds^2 des surfaces réglées; par M. Ch. Bioche.

(Séance du 17 avril 1889.)

Je me propose de montrer comment on peut déduire de l'expression de l'arc d'une courbe tracée sur une surface réglée des formules générales, dont je montrerai l'utilité en indiquant des applications.

1. *Notations.* — On peut considérer une surface réglée comme engendrée par une droite qui s'appuie sur une courbe donnée, les cosinus directeurs a, b, c de cette droite étant des fonctions d'un paramètre arbitraire, par exemple de l'arc σ de la courbe directrice. Pour définir la position de la génératrice par rapport à cette courbe, il suffit de donner l'angle φ que le plan tangent à la surface réglée, au point situé sur la directrice, fait avec le plan osculateur et l'angle θ que la génératrice fait avec la directrice. Si l'on appelle $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, on a

$$\begin{aligned} \cos\theta &= a\alpha + b\beta + c\gamma, \\ \sin\theta\cos\varphi &= a\alpha' + b\beta' + c\gamma', \\ \sin\theta\sin\varphi &= a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma''. \end{aligned}$$

Un point de la surface peut être défini par deux coordonnées, σ et r, dont la première fixe la génératrice qui passe par le point, en donnant son pied sur la directrice, et la seconde fixe le point sur la génératrice en donnant sa distance au pied. Toute relation entre σ et r définit une courbe tracée sur la surface.

2. *Calcul du ds^2.* — Les coordonnées cartésiennes des points d'une courbe étant données d'après ce qui précède, en fonction de σ, par

$$X = x + ar, \qquad Y = y + br, \qquad Z = z + cr,$$

x, y, z désignant les coordonnées du pied de la génératrice, on trouve que l'arc de la courbe est donné par

$$\frac{dS^2}{d\sigma^2} = \left(\frac{dr}{d\sigma} + \cos\theta\right)^2 + H^2r^2 + 2Lr + \sin^2\theta.$$

J'ai posé, pour abréger,

$$\frac{da^2}{d\sigma^2}+\frac{db^2}{d\sigma^2}+\frac{dc^2}{d\sigma^2}=\mathrm{H}^2,$$

$$\alpha\frac{da}{d\sigma}+\beta\frac{db}{d\sigma}+\gamma\frac{dc}{d\sigma}=\mathrm{L}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la directrice soit ligne de striction est que $\mathrm{L}=0$. Dans cette hypothèse, la distance de deux génératrices infiniment voisines est $\sin\theta.d\sigma$, et, comme l'angle a toujours pour expression $\mathrm{H}d\sigma$, le paramètre de distribution K s'exprime par

$$\mathrm{K}=\frac{\mathrm{H}}{\sin\theta},$$

et l'expression de $\frac{d\mathrm{S}^2}{d\sigma^2}$ prend alors la forme réduite

$$\frac{d\mathrm{S}^2}{d\sigma^2}=\left(\frac{dr}{d\sigma}+\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta[\mathrm{K}^2r^2+1].$$

3. *Conséquences.* — Cette réduction du terme indépendant de la parenthèse en $\frac{dr}{d\sigma}$, à la forme binôme, ne peut se faire que si la directrice est ligne de striction. Mais, comme on peut toujours écrire

$$\frac{d\mathrm{S}^2}{d\sigma^2}=\left(\frac{dr}{ds}+\cos\theta\right)^2+\mathrm{H}^2\left(r+\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}^2}\right)^2+\frac{\mathrm{H}^2\sin^2\theta-\mathrm{L}^2}{\mathrm{H}^2},$$

on en déduit immédiatement que le r du point central a pour valeur la longueur ρ donnée par

$$(1)\qquad \rho=-\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}^2};$$

et si l'on remarque que, dans la forme réduite, le quotient du coefficient de r^2 par le terme indépendant est K^2, on trouve

$$(2)\qquad \mathrm{K}^2=\frac{\mathrm{H}^4}{\mathrm{H}^2\sin^2\theta-\mathrm{L}^2}.$$

Les formules (1) et (2) sont celles qui font l'objet de cette Note.

Ce qui précède s'applique aux surfaces développables; car ces surfaces peuvent être considérées comme des cas limites des surfaces gauches, le paramètre de distribution devenant infini. La ligne de striction est alors l'arête de rebroussement de la développable.

La condition pour qu'une surface réglée passant par une courbe soit développable est donc

$$H^2 \sin^2\theta - L^2 = 0,$$

et le point où la génératrice touche l'arête de rebroussement est à une distance du pied donnée par

$$\rho = -\frac{\sin^2\theta}{L}.$$

Si l'on calcule H^2 et L au moyen des courbures ω et π de la directrice et des angles θ et φ, on trouve facilement que ces dernières équations deviennent

$$\sin^2\theta\left(\cot\theta \sin\varphi + \pi - \frac{d\varphi}{d\sigma}\right) = 0, \tag{3}$$

$$\rho = \frac{\sin\theta}{\frac{d\theta}{d\sigma} + \omega\cos\varphi}. \tag{4}$$

4. *Application aux développables passant par une courbe donnée.* — Si l'on suppose $\theta = 90^\circ$, on retrouve la théorie classique des développées; si l'on suppose θ constant ou, plus généralement, fonction de σ, l'équation (3) donne une équation de Riccati en tang $\frac{\varphi}{2}$ (¹).

Si l'on suppose φ donné, θ est déterminé immédiatement. En particulier, si l'on suppose φ constant, c'est-à-dire si l'on cherche les développables qui coupent sous un angle constant la développable des tangentes (problème inverse d'un problème traité par M. Molins, dans le *Journal de Liouville*, 1847), θ est donné par

$$\omega \cot\theta \sin\varphi + \pi = 0.$$

Cette équation s'interprète géométriquement de la façon suivante. Les génératrices des développables $\varphi =$ const. qui passent par un même point de la directrice sont situées sur un cône, dont

(¹) *Voir* une Note de M. L. Lévy, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, novembre 1883.

l'équation rapportée au trièdre fondamental de cette courbe est

$$\pi(y^2+z^2)+\omega x z=0.$$

Ce cône a pour plan de symétrie le plan rectifiant; les génératrices situées dans ce plan sont la tangente et la droite rectifiante; les sections circulaires sont perpendiculaires à ces deux droites, ce qui détermine complètement le cône.

5. *Application aux normalies.* — La directrice d'une normalie est une trajectoire orthogonale des génératrices. Si l'on prend pour plans de coordonnées le plan tangent et les plans principaux, si l'on appelle R et R′ les rayons de courbure principaux, et ψ l'angle que la directrice fait avec la section principale de rayon R, on a

$$\alpha=\cos\psi,\qquad \beta=\sin\psi,\qquad \gamma=0;$$

d'autre part, on peut voir que

$$\frac{da}{d\sigma}=-\frac{\cos\psi}{R},\qquad \frac{db}{d\sigma}=-\frac{\sin\psi}{R'},\qquad \frac{dc}{d\sigma}=0,$$

ce qui donne

$$H^2=\frac{\cos^2\psi}{R^2}+\frac{\sin^2\psi}{R'^2},$$

$$-L=\frac{\cos^2\psi}{R}+\frac{\sin^2\psi}{R'};$$

par suite, les formules (1) et (2) deviennent, pour une normalie,

$$\rho=\frac{\dfrac{\cos^2\psi}{R}+\dfrac{\sin^2\psi}{R'}}{\dfrac{\cos^2\psi}{R^2}+\dfrac{\sin^2\psi}{R'^2}},$$

$$K^2=\frac{\left(\dfrac{\cos^2\psi}{R^2}+\dfrac{\sin^2\psi}{R'^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R'}\right)^2\sin^2\psi\cos^2\psi}.$$

Ces dernières formules permettent de faire l'étude du pinceau des normales voisines de OZ. En particulier, on peut obtenir la *torsion géodésique* de la façon suivante : si ω et π sont les courbures d'une géodésique, la normalie correspondante, qui est formée des normales principales de cette courbe, a, d'après la formule (2), pour paramètre de distribution

$$K = \frac{\omega^2 + \pi^2}{\pi}.$$

Or, si l'on remarque que l'angle de deux normales principales est $\sqrt{\omega^2 + \pi^2} \times ds$, on voit que

$$\omega^2 + \pi^2 = H^2,$$

et l'on a

$$\pi = \frac{H^2}{K} = \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) \sin\psi \cos\psi,$$

ce qui est, aux notations près, la formule donnée par M. Bertrand.