Bulletin de la S. M. F.

Ch. Bioche

Remarques sur les lignes de courbure qui passent par un ombilic

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 95-106
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__95_1>

Remarques sur les lignes de courbure qui passent par un ombilic; par M. Ch. Bioche.

Voici, en résumé, les questions qui font l'objet du Mémoire suivant:

Je discute les considérations théoriques d'où l'on peut déduire l'équation des lignes de courbure pour un ombilic.

Après avoir établi des résultats connus, relatifs à la distribution des lignes de courbure qui passent par un ombilic, lorsque l'équation qui détermine leurs directions est du troisième degré, je discute un raisonnement erroné de Dupin.

Je fais remarquer que, contrairement à une assertion de M. Amiot, il passe toujours au moins deux lignes de courbure réelles par tout ombilic pour lequel l'équation est de degré pair.

Je montre que, si, par un point où toutes les courbures normales sont nulles, il passe trois lignes asymptotiques, les directions de ces lignes alternent avec celles des lignes de courbure.

Enfin je donne la liste des travaux que j'ai pu retrouver, et où il est question des lignes de courbure qui passent par un ombilic.

I.

Équation des lignes de courbure.

1. L'équation qui détermine les directions des lignes de courbure passant par un point d'une surface se réduit à une identité

si le point est un ombilic. Comme l'a fait remarquer Dupin, il ne s'ensuit pas nécessairement que par un ombilic il passe une infinité de lignes de courbure, mais seulement que leur nombre n'est plus 2. Pour lever l'indétermination dans le cas où elle n'est qu'apparente, on différentie l'équation ordinaire; de même que, pour trouver les tangentes en un point multiple d'une courbe $F(x,y)=0$, on différentie l'équation

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0,$$

qui, pour le point considéré, devient une identité. Les auteurs qui, pour justifier cette règle, ont employé des considérations se rapportant directement à la question ont suivi deux voies différentes.

Poisson remarquait que, la plus courte distance Δ des normales en deux points voisins M et M′ étant, en général, du premier ordre par rapport à MM′, si M est un point ordinaire, est d'un ordre supérieur pour les lignes de courbure. Si le point M est un ombilic, il y a des directions pour lesquelles Δ est, par rapport à MM′, un infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre obtenu pour les autres directions. Ce sont ces directions particulières que Poisson appelle *directions des lignes de courbure* passant par l'ombilic. Leur équation s'obtient en formant l'expression générale de Δ, et en écrivant que le terme principal est nul.

Cette méthode suppose une généralisation, parfaitement logique d'ailleurs, mais qui comporte, comme toutes les opérations de ce genre, un peu d'arbitraire. Aussi la méthode de Dupin, reprise et précisée par M. Amiot, me paraît-elle plus naturelle. Elle consiste à exprimer qu'une des lignes de courbure d'un point M′ voisin de l'ombilic M passe par M. Ce qui revient à former l'équation des lignes de courbure pour le point $M'(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$, le point M ayant pour coordonnées (x, y, z), et à écrire que l'une des racines de l'équation en $\frac{dy}{dx}$ ainsi obtenue est $\frac{\delta y}{\delta x}$.

2. Les deux méthodes conduisent à la même équation. En effet, supposons, pour plus de simplicité, que l'ombilic soit à l'origine des coordonnées, le plan $z=0$ étant le plan tangent. Soit

P(dx, dy, dz) un point voisin de l'ombilic O. La plus courte distance des normales en O et P est

$$\Delta = \frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

L'équation des lignes de courbure pour l'origine des coordonnées, lorsque OZ est la normale, peut s'écrire, en général,

$$dp\,dy - dq\,dx = 0. \tag{1}$$

La méthode de Poisson conduit à développer p et q en série, par rapport à dx et dy, et à égaler à zéro le premier terme du développement de Δ qui n'est pas identiquement nul. Celle de Dupin conduit à différentier l'équation (1). Or la première différentielle de $dp\,dy - dq\,dx$, qui n'est pas identiquement nulle, est égale (à un facteur numérique près) au terme en question du développement de Δ.

En particulier, pour les axes considérés, on a, en appelant α, β, γ, δ les dérivées troisièmes de z par rapport à x et y,

$$\left(\beta + \gamma\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy^2}{dx^2} - 1\right) + \left[(\alpha-\gamma) + (\beta-\delta)\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx} = 0.$$

J'appellerai ombilics ordinaires ceux pour lesquels, les dérivées troisièmes n'étant pas toutes nulles, l'équation des lignes de courbure est du troisième degré; ombilics d'ordre supérieur ceux pour lesquels l'équation précédente se réduit à une identité; dans ce cas on différentie de nouveau, ce qui donne une équation de degré plus élevé.

3. Tout ce qui précède s'applique toutes les fois que les dérivées de z ont des valeurs bien déterminées à l'ombilic. Ce qui arrive pour les surfaces algébriques ou, plus généralement, pour les surfaces $F(x, y, z) = 0$, telles que :

1° Au point considéré les trois dérivées $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$ ne soient pas toutes nulles, ce qui exprime que le point est simple;

2° Les dérivées d'ordre supérieur de F aient des valeurs bien déterminées.

Il est facile de s'en assurer en différentiant $F(x, y, z) = 0$ par rapport à x et y (z étant fonction de x et y), ce qui donne les équations permettant de calculer les dérivées de z.

II.

Ombilics ordinaires.

4. Supposons d'abord qu'un ombilic ordinaire appartienne à une ligne ombilicale; l'équation des lignes de courbure est, dans tous les cas,

$$(2)\qquad \left(\beta+\gamma\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy^2}{dx^2}-1\right)+\left[(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx}=0.$$

S'il y a une ligne ombilicale, il y a un point P voisin de O pour lequel les trois équations

$$\begin{aligned}(1+q^2)r-(1+p^2)t &= 0,\\ (1+p^2)s-\quad pqr &= 0,\\ (1+q^2)s-\quad pqt &= 0,\end{aligned}$$

obtenues en écrivant que la courbure d'une section normale ne dépend pas de sa direction, sont vérifiées. Si l'on développe les premiers membres de ces équations en série, comme ils sont nuls pour le point O, on a, comme premiers termes, des infiniment petits qui sont

$$(\alpha-\gamma)dx+(\beta-\delta)dy$$

pour la première expression, et

$$\beta\,dx+\gamma\,dy$$

pour les deux autres. D'après l'hypothèse, ces deux termes doivent être nuls si l'on se déplace sur la direction OP. Cette direction est donnée par la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui vérifie simultanément les équations

$$\beta+\gamma\frac{dy}{dx}=0,\qquad (\alpha-\gamma)+(p-\delta)\frac{dy}{dx}=0.$$

D'autre part, cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ vérifie l'équation (2), puisque tout le long de la ligne ombilicale l'équation

$$(dx+p\,dz)dq-(dy+q\,dz)dp=0$$

est identiquement vérifiée. Si l'on supprime le facteur correspondant à la ligne ombilicale, l'équation (2) devient

$$\frac{dy^2}{dx^2} - \mu \frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

μ étant une combinaison des dérivées α, β, γ, δ; on voit alors que, *si un ombilic ordinaire appartient à une ligne ombilicale, il passe par ce point deux lignes de courbure proprement dites, de directions rectangulaires*. La ligne ombilicale a une direction quelconque par rapport aux lignes de courbure. On peut le vérifier sur l'équation donnée par M. de Saint-Germain, à la fin de sa *Note sur les surfaces du troisième ordre qui ont une ligne d'ombilics*.

5. Dans le cas d'un ombilic ordinaire isolé, les directions des lignes de courbure peuvent affecter toutes sortes de dispositions.

Sur les surfaces du second degré, qui ne sont pas de révolution, il ne passe par chaque ombilic qu'une ligne de courbure réelle : c'est la section principale passant par l'ombilic; les racines imaginaires correspondent aux deux génératrices de la surface, qui sont des droites isotropes. En effet, une surface du second degré, rapportée à un ombilic, a une équation de la forme

$$2z = a(x^2 + y^2) + bz^2 + 2cxz,$$

si l'on prend pour plan des xz le plan principal qui contient l'ombilic. L'équation des lignes de courbure est alors

$$ac \frac{dy}{dx}\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right) = 0,$$

$ac \neq 0$ si la surface n'est ni un système de deux plans, ni une surface de révolution. Les planches de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*, par Monge, permettent de constater sur l'ellipsoïde ce fait général : une ligne de courbure passant par un ombilic ordinaire y est divisée en deux parties, dont l'une correspond aux courbures minima, l'autre aux courbures maxima.

Il est facile de voir que le cas réalisé pour les surfaces du second ordre n'est pas le seul; car, pour la surface

$$xyz = 1,$$

les plans

$$x = y, \qquad y = z, \qquad x = z,$$

qui sont évidemment des plans de symétrie, coupent la surface suivant des lignes de courbure réelles; ces lignes se croisent à l'ombilic

$$x = y = z = 1,$$

en faisant deux à deux des angles égaux.

6. D'ailleurs l'équation des lignes de courbure, pour un ombilic, peut s'écrire, en général,

$$\gamma \frac{dy^3}{dx^3} + (2\beta - \delta)\frac{dy^2}{dx^2} + (\alpha - 2\gamma)\frac{dy}{dx} - \beta = 0,$$

et l'on peut disposer des valeurs des dérivées α, β, γ, δ, de façon que les racines de l'équation aient les valeurs qu'on voudra; il est facile de s'en assurer et de former des exemples. On peut en former à volonté au moyen des surfaces représentées par l'équation

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1}{1.2.3}(\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3),$$

où α, β, γ, δ sont des constantes. Pour toutes ces surfaces, l'ombilic $x = y = z = 0$ est isolé, car M. de Saint-Germain a déterminé toutes les surfaces du troisième degré qui ont une infinité d'ombilics, et les surfaces précédentes ne rentrent pas dans cette catégorie.

Je citerai, comme exemple, la surface

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{m}{1.2.3}[2x^3 + 3xy^2],$$

pour laquelle l'équation des lignes de courbure est $\frac{dy^3}{dx^3} = 0$, et la surface

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{m}{1.2.3}[x^3 + 3xy^2],$$

étudiée par M. Frost, surface pour laquelle l'équation des lignes de courbure est

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy^2}{dx^2} - 1\right) = 0.$$

7. Dupin avait cru pouvoir affirmer que, sur toute surface, pour un ombilic ordinaire isolé, il n'y avait qu'une ligne de courbure réelle. Cette affirmation est détruite par ce qui précède; mais le raisonnement de Dupin étant assez spécieux, je crois qu'il est bon de le discuter pour en montrer le défaut. Dupin considérait les ombilics isolés comme des points doubles d'une ligne ombilicale imaginaire; les directions des tangentes à cette ligne devaient vérifier l'équation des lignes de courbure, qui, par suite, n'avait plus qu'une racine réelle correspondant à une ligne de courbure proprement dite.

Reprenons les équations de condition qui expriment qu'un point est un ombilic. Si l'on écrit que l'équation aux courbures principales a ses racines égales, on a

$$R = [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 + 4(s^2 - rt)(1+p^2+q^2) = 0.$$

L'expression R se trouve aussi sous le radical correspondant à l'équation des lignes de courbure; elle peut se mettre sous forme d'une somme de quantités positives; pour arriver à ce résultat, en conservant la symétrie des formules par rapport aux variables indépendantes x et y (¹), il suffit de considérer R comme un trinôme en s; on a alors

$$\frac{R}{(1+p^2)(1+q^2)} = \left[2s - pq\left(\frac{r}{1+p^2} + \frac{t}{1+q^2}\right)\right]^2 + (1+p^2+q^2)\left(\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right)^2.$$

Je poserai, pour abréger,

$$M = 2s - pq\left(\frac{r}{1+p^2} + \frac{t}{1+q^2}\right), \quad N = \left(\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right)\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Les ombilics d'une surface $F(x, y, z) = 0$ sont donnés par les équations

$$F = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0;$$

les deux dernières expriment que la courbure normale est la même pour toutes les directions, et que l'équation ordinaire des lignes de courbure est vérifiée pour toutes les directions partant de

---

(¹) M. Souillart a fait remarquer (*Journal de Crelle,* 65, 1866) qu'on pouvait déduire d'un *hessien bordé* des expressions symétriques par rapport aux trois coordonnées.

l'ombilic. Si les ombilics sont isolés, c'est-à-dire si les trois équations sont indépendantes, il y aura bien sur la surface une ligne imaginaire L, intersection de

$$F = 0 \qquad \text{et} \qquad M^2 + N^2 = 0;$$

le long de cette ligne, l'équation aux courbures principales et l'équation des lignes de courbure ont leurs racines doubles, tandis que, aux ombilics, les trois coefficients de chacune des équations sont tous nuls; ce qui est une condition plus restrictive; de sorte que, en tous les points de la ligne L, l'équation aux lignes de courbure n'est pas identiquement vérifiée; donc la ligne L n'est pas une ligne d'ombilics, et, de plus, elle n'est pas, en général, ligne de courbure.

Autrement, l'équation $M^2 + N^2 = 0$ n'est équivalente au système $M = 0$, $N = 0$ que si l'on se borne aux solutions réelles; les solutions imaginaires de la première ne conviennent pas aux deux autres; et, précisément dans le raisonnement de Dupin, il s'agissait de solutions imaginaires.

III.

Ombilics d'ordre supérieur.

8. La discussion complète des ombilics d'ordre supérieur a un intérêt très limité, car ces points sont très exceptionnels. Je veux seulement relever à leur égard une assertion erronée de M. Amiot. M. Amiot dit : « Il faut remarquer que, si l'équation des lignes de courbure est du quatrième degré, il peut n'y avoir pas de lignes de courbure passant par l'ombilic », et ceci n'est accompagné d'aucune démonstration. Le cas énoncé serait remarquable, s'il était réalisable; aussi je crois qu'il peut être intéressant de faire voir que, pour un ombilic, l'équation aux lignes de courbure n'a jamais toutes ses racines imaginaires : ce qui revient à dire qu'il n'y a pas d'ombilic où il ne passe pas de ligne de courbure réelle. Le seul cas à discuter est celui pour lequel le degré de l'équation est pair; je raisonnerai dans l'hypothèse où ce degré serait 4 : la méthode est générale.

9. J'appelle A, B, C, D, E les dérivées quatrièmes de z; lorsque

l'équation du troisième degré se réduit à une identité, la différentiation conduit à

$$D\frac{dy^4}{dx^4}+(3C-E)\frac{dy^3}{dx^3}+3(B-D)\frac{dy^2}{dx^2}+(A-3C)\frac{dy}{dx}-B=0,$$

équation qui ne se réduit à une identité que si, dans le développement de z, l'ensemble des termes du quatrième degré est, à un facteur près, $(x^2+y^2)^2$. Je supposerai ce cas écarté, de façon que l'équation des lignes de courbure soit bien du quatrième degré.

On peut faire en sorte que A, B, C, D, E aient des valeurs données; mais on ne dispose pas entièrement des coefficients de l'équation, car trois d'entre eux ne contiennent que B et D. On ne peut donc plus, comme dans le cas du troisième degré, donner à l'équation en $\frac{dy}{dx}$ des racines prises arbitrairement.

Pour un ombilic de la nature de ceux que je considère, le développement de z en série donne

$$z=\frac{r}{2}(x^2+y^2)+\varphi(x,y)+R,$$

$\varphi(x,y)$ étant un polynôme du quatrième degré, homogène, et R l'ensemble de termes de degré plus élevé. Pour toutes les surfaces qui ne diffèrent que par R, les dérivées quatrièmes et par suite l'équation des lignes de courbure à l'ombilic sont les mêmes; de sorte qu'il suffit de montrer que, pour la surface

$$z=\frac{r}{2}(x^2+y^2)+\varphi(x,y),$$

l'équation des lignes de courbure ne peut pas avoir toutes ses racines imaginaires.

10. Coupons cette surface par un plan $z=h$, parallèle au plan tangent et situé du côté de ce plan où se trouvent les points de la surface voisins de l'ombilic; la projection de la section sur le plan tangent a pour équation en coordonnées polaires

$$h=\frac{r}{2}\rho^2+\rho^4\varphi(\cos\theta,\,\sin\theta).$$

L'équation en ρ a deux racines réelles voisines de O, autrement dit, la section présente dans le voisinage de l'origine une boucle fermée réelle qui diffère très peu du cercle

$$\rho = \sqrt{\frac{2h}{r}}.$$

Le rayon vecteur d'un point de cette boucle est variable, si l'on suppose que φ satisfasse à la restriction énoncée plus haut, et d'où résulte que l'équation des lignes de courbure est du quatrième degré. Le rayon vecteur a donc au moins un maximum et un minimum *réels*. Soit M un point pour lequel il y a un maximum; la normale en ce point rencontre OZ, car elle se projette sur le rayon vecteur: donc OM est la direction d'une ligne de courbure réelle. Pour la surface du quatrième degré considérée, la normale en M rencontre *effectivement* OZ; autrement dit, les lignes de courbure sont planes. Il est d'ailleurs facile de s'en assurer en prenant pour l'un des axes de coordonnées la tangente à l'une de ces lignes. Cela n'aurait pas lieu pour une surface quelconque. La courbe des centres de courbure correspondant à la ligne de courbure considérée aurait simplement un plan osculateur stationnaire au point situé sur la normale à l'ombilic.

Je remarquerai, en terminant, que de ce qui précède résulte le théorème d'Algèbre suivant :

Si $\varphi(x, y)$ est un polynôme homogène de degré $2n$, $y\varphi'_x - x\varphi_y$ admet toujours au moins deux facteurs réels du premier degré.

IV.

Points d'inflexion totale.

11. Il peut arriver que sur une surface à courbures opposées on ait à la fois en un point

$$r = 0, \qquad s = 0, \qquad t = 0.$$

En ce point toutes les sections normales ont une courbure nulle; il peut donc être assimilé à un ombilic. M. Amiot a étudié ces points dans un Mémoire couronné par l'Académie de Belgique, en 1846, et les a appelés *points d'inflexion totale,* parce qu'en ces points toutes les courbures changent de sens. M. de Saint-

Germain a montré (*Comptes rendus*, 1885) qu'il y avait des surfaces du troisième degré ayant une infinité de points de cette nature.

L'équation des lignes de courbure et celle des lignes asymptotiques se réduisent à des identités; on a, comme dans le cas des ombilics ordinaires, pour équation des lignes de courbure,

$$\gamma\, dy^3 + (2\beta - \delta)\, dx\, dy^2 + (\alpha - 2\gamma)\, dx^2\, dy - \beta\, dx^3 = 0.$$

Pour trouver les lignes asymptotiques passant par l'ombilic, on peut écrire que l'une des lignes asymptotiques d'un point voisin passe par le point O considéré, ce qui donne

$$\alpha\, dx^3 + 3\beta\, dx\, dy^2 + 3\gamma\, dx^2\, dy + \delta\, dy^3 = 0,$$

équation que l'on obtiendrait d'ailleurs en déterminant les directions des lignes qui ont non plus trois, mais quatre points communs avec le plan tangent. Ce plan est alors stationnaire pour les asymptotiques. Celles-ci peuvent être toutes trois réelles; il peut y en avoir d'imaginaires ou de confondues, on le voit, comme pour les lignes de courbure.

Je ferai simplement remarquer que, *comme dans le cas des points ordinaires, les directions des asymptotiques sont séparées par celles des lignes de courbure*. En effet, posons

$$\frac{dx}{\cos\theta} = \frac{dy}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad \varphi(\theta) = \alpha\cos^2\theta + 3\beta\cos^2\theta\sin\theta + 3\gamma\cos\theta\sin^2\theta + \delta\sin^3\theta,$$

on voit que $\varphi(\theta) = 0$ est l'équation qui donne les directions des asymptotiques; or on peut remarquer que

$$-\tfrac{1}{3}\varphi'(\theta) = \gamma\sin^3\theta + (2\beta - \delta)\sin^2\theta\cos\theta + (\alpha - 2\gamma)\sin\theta\cos^2\theta - \beta\cos^3\theta.$$

de sorte que $\varphi'(\theta) = 0$ donne des lignes de courbure. L'application du théorème de Rolle aux équations $\varphi(\theta) = 0$, $\varphi'(\theta) = 0$ justifie la proposition énoncée.

V.

Bibliographie.

Monge. *Application de l'Analyse à la Géométrie*, §§ XVI et XIX.

Dupin. *Développements de Géométrie*. Troisième Mémoire, art. IV et V, p. 157 et suiv.

Poisson. *Mémoire sur la courbure des surfaces*, § VIII. (*Journal de Crelle*, t. 8, p. 280-297; réimprimé dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XXI^e Cahier, p. 204-227; 1832.)

Amiot. *Note sur quelques points de la théorie analytique des surfaces*. (*Journal de Mathématiques*, t. XII, p. 129-135; 1847.)

O. Bonnet. *Note sur les ombilics des surfaces*. (*Journal de l'École Polytechnique*, XXX^e Cahier, p. 165-170; 1845.)

Vieille. *Remarques sur la théorie des lignes de courbure*, etc. (*Journal de Mathématiques*, t. XX, p. 126; 1855.)

Cayley. *On differential equations and umbilici*. (*Philosophical Magazine*, t. XXVI, p. 373-379, 441-452; 1863.)

P. Frost. *On the direction of lines of curvature in the neighbourhood of an ombilicus*. (*Quarterly Journal*, t. X, p. 78; 1870.)

Cayley. *Note on Mr. Frost paper*. (*Quarterly Journal*, t. X, p. 111-113; 1870.)

R. Hoppe. *Krümmungslinien in den Nabelpunkten von Flächen*. [*Archiv für die Math. und Physik*, t. LXX, p. 289-301. (Analysé dans *Jahrbuch über die Fortschritte der Math.*, p. 669; 1886.)]

Darboux. *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes*. (*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 1133; 19 nov. 1883.)

De Saint-Germain. *Sur certaines surfaces du troisième ordre qui ont une infinité d'ombilics*. (*Comptes rendus*, t. C, p. 1246; 14 déc. 1885.)