

BULLETIN DE LA S. M. F.

F. CASPARY

Sur les fonctions sphériques

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 11-18

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__11_1

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les fonctions sphériques; par M. F. CASPARY.

Dans une lettre que M. Hermite a bien voulu m'adresser, l'illustre géomètre, en généralisant la formule élégante de M. Bel-

trami

$$(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = \frac{n(n+1)}{2n+1} (P_{n+1} - P_{n-1}),$$

a établi la relation importante

$$(x^2 - 1)^v \frac{d^v P_n}{dx^v} = A P_{n+v} + A_1 P_{n+v-1} + \dots + A_v P_{n-v},$$

et a exprimé, au moyen d'une formule de Jacobi, les coefficients A, A_1, \dots, A_v sous la forme d'intégrales définies (1).

Je me propose, dans cette Note, de généraliser les formules de Jacobi, de M. Beltrami et de M. Hermite, de déduire les valeurs numériques des coefficients A, A_1, \dots, A_v et d'établir, d'une façon tout à fait élémentaire, quelques autres formules qui me paraissent non sans intérêt pour la théorie des fonctions sphériques.

1. Les fonctions sphériques de première espèce, que je désigne par $P_r(x)$ ou plus simplement encore par P_r , sont les coefficients de x^r ($r = 1, 2, \dots$) dans la série

$$(I) \quad T = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \dots + \alpha^n P_n + \dots$$

On tire de cette définition, en différenciant par rapport à α et à x (2),

$$(II) \quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x - \alpha) T,$$

$$(III) \quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T,$$

ou

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2) \frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x - \alpha) T,$$

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T.$$

En égalant dans les deux membres de la première formule les coefficients de α^n et, dans les deux membres de la deuxième formule, les coefficients de α^{n+1} , on obtient

$$(1) \quad (n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0,$$

$$(2) \quad P'_{n+1} - 2xP'_n + P'_{n-1} = P_n,$$

(1) Voir HERMITE, *Sur les polynômes de Legendre* (*Journal de M. Kronecker*), t. CVII, p. 80.

(2) Voir *Journal de M. Kronecker*, t. CVII, p. 137.

où

$$P'_r = \frac{dP_r}{dx}.$$

Si l'on différentie la formule (1) par rapport à x , et si l'on élimine successivement P'_n , P'_{n-1} , P'_{n+1} , on trouve

$$(3) \quad P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n,$$

$$(4) \quad P'_{n+1} - xP'_n = (n+1)P_n,$$

$$(5) \quad xP'_n - P'_{n-1} = nP_n;$$

et en différentiant ces formules ($\nu-1$) fois par rapport à x , on a

$$(6) \quad P_{n+1}^{(\nu)} - P_{n-1}^{(\nu)} = (2n+1)P_n^{(\nu)},$$

$$(7) \quad P_{n+1}^{(\nu)} - xP_n^{(\nu)} = (n+\nu)P_n^{(\nu-1)},$$

$$(8) \quad xP_n^{(\nu)} - P_{n-1}^{(\nu)} = (n-\nu+1)P_n^{(\nu-1)},$$

où

$$P_n^{(\nu)} = \frac{d^\nu P_n}{dx^\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n).$$

Les formules (7) et (8) fournissent encore les relations

$$(9) \quad (n-\nu+1)P_{n+1}^{(\nu)} - (2n+1)xP_n^{(\nu)} + (n+\nu)P_{n-1}^{(\nu)} = 0,$$

$$(10) \quad P_{n+1}^{(\nu)} - 2xP_n^{(\nu)} + P_{n-1}^{(\nu)} = (2\nu-1)P_n^{(\nu-1)},$$

dont la dernière découle aussi de la formule

$$\frac{1}{T^2} \frac{\partial^\nu T}{\partial x^\nu} = (2\nu-1)\alpha \frac{\partial^{\nu-1} T}{\partial x^{\nu-1}},$$

qui est elle-même la conséquence immédiate de la relation

$$(IV) \quad \frac{\partial^\nu T}{\partial x^\nu} = 1.3.5.7 \dots (2\nu-1)\alpha^\nu T^{2\nu+1}.$$

2. D'après la formule (II), on a

$$(x-\alpha) \frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x-\alpha)^2 T^3;$$

et comme on a aussi identiquement

$$(x-\alpha)^2 = x^2 - 1 + (1 - 2\alpha x + \alpha^2) = (x^2 - 1) + \frac{1}{T^2},$$

on obtient

$$(x-\alpha) \frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x^2 - 1) T^3 + T,$$

ou, d'après la formule (III),

$$(x^2 - 1) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(x - \alpha) \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \alpha T.$$

En égalant, dans les deux membres de cette formule, les coefficients de α^n , on trouve

$$(11) \quad (x^2 - 1)P'_n = n(xP_n - P_{n-1})$$

et, à cause de la formule (1), on en déduit aussi les relations

$$(12) \quad (x^2 - 1)P'_n = (n + 1)(P_{n+1} - xP_n),$$

$$(13) \quad (x^2 - 1)P'_n = \frac{n(n + 1)}{2n + 1}(P_{n+1} - P_{n-1}),$$

dont la dernière est celle de M. Beltrami.

Si l'on différencie cette formule, on en tire, au moyen de la formule (3), l'équation différentielle bien connue

$$(14) \quad \frac{d(x^2 - 1)P'_n}{dx} = n(n + 1)P_n,$$

à laquelle on peut aussi donner la forme

$$(x^2 - 1)P''_n + 2xP'_n = n(n + 1)P_n.$$

Par différentiation, on en tire immédiatement

$$(x^2 - 1)P''_n^{(\mu+2)} + 2(\mu + 1)xP''_n^{(\mu+1)} = [n(n + 1) - \mu(\mu + 1)]P''_n^{(\mu)},$$

et en multipliant par $(x^2 - 1)^\mu$, on a

$$(x^2 - 1)^{\mu+1}P''_n^{(\mu+2)} + 2(\mu + 1)x(x^2 - 1)^\mu P''_n^{(\mu+1)} = (n - \mu)(n + \mu + 1)(x^2 - 1)^\mu P''_n^{(\mu)}$$

ou

$$(15) \quad \frac{d(x^2 - 1)^{\mu+1}P''_n^{(\mu+1)}}{dx} = (n - \mu)(n + \mu + 1)(x^2 - 1)^\mu P''_n^{(\mu)}$$

et, par conséquent, plus généralement,

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{\lambda+1}(x^2 - 1)^{\mu+1}P''_n^{(\mu+1)}}{dx^{\lambda+1}} \\ = (n - \mu) \dots (n - \mu + \lambda)(n + \mu - \lambda + 1) \dots (n + \mu + 1)(x^2 - 1)^{\mu-\lambda} P''_n^{(\mu-\lambda)}, \\ (\lambda = 0, 1, 2, \dots, \mu), \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots, n - 1). \end{array} \right.$$

La formule (16) donne naissance à beaucoup de relations dont je vais établir quelques-unes, savoir la généralisation de l'équation

différentielle (14), la généralisation de la formule de M. Beltrami et les deux formules importantes que l'on doit à Rodrigues et à Jacobi.

En effet, si l'on pose dans la formule (16) $\lambda + 1 = \mu + 1 = \nu$, on en tire

$$(17) \quad \frac{d^\nu (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}}{dx^\nu} = (n - \nu + 1)(n - \nu + 2) \dots (n + \nu) P_n,$$

formule qui représente la généralisation de l'équation différentielle (14).

De plus, si l'on pose $\lambda + 1 = \nu - 1$, $\mu + 1 = \nu$, la formule (16) prend la forme

$$\frac{d^{\nu-1} (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}}{dx^{\nu-1}} = (n - \nu + 1) \dots (n - 1)(n + 2) \dots (n + \nu)(x^2 - 1) P_n',$$

et, d'après la formule de M. Beltrami, on obtient la généralisation suivante de cette relation

$$(18) \quad \frac{d^{\nu-1} (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}}{dx^{\nu-1}} = \frac{(n - \nu + 1) \dots (n + \nu)}{2n + 1} (P_{n+1} - P_{n-1}).$$

Pour déduire de la formule (17) l'expression connue de P_n , due à Rodrigues et à Jacobi, j'y pose $\nu = n$. Alors on a

$$\frac{d^n (x^2 - 1)^n P_n^{(n)}}{dx^n} = 1.2.3. \dots 2n. P_n.$$

Or on déduit de l'expression (IV)

$$P_n^{(n)} = 1.3.5.7. \dots (2n - 1);$$

donc la dernière formule devient

$$1.2.3. \dots 2n. P_n = 1.3.5.7. \dots (2n - 1) \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

ou

$$(19) \quad P_n = \frac{1}{2^n.1.2.3. \dots n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Au moyen des valeurs de $P_n^{(n)}$ et P_n , que je viens d'établir, la formule (16) fournit enfin, pour $\mu = n - 1$, $\lambda = n - \nu - 1$ ($\nu < n$):

$$\frac{d^{n-\nu} (x^2 - 1)^\nu P_n^{(n)}}{dx^{n-\nu}} = 1.2.3. \dots (n - \nu)(n + \nu + 1) \dots 2n (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}$$

ou encore

$$1.3.5\dots(2n-1) \frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}} = \frac{1.2\dots 2n}{(n-\nu+1)\dots(n+\nu)} (x^2-1)^\nu P_n^{(\nu)}$$

ou enfin

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}} &= 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (x^2-1)^\nu P_n^{(\nu)}, \\ &= \frac{(x^2-1)^\nu}{(n-\nu+1)\dots(n+\nu)} \frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}, \end{aligned} \right.$$

formule qui est due à Jacobi.

3. En différentiant la formule de M. Beltrami ($\nu - 1$) fois par rapport à x , et ayant égard à la formule (9), on obtient

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} &(2n+1)(x^2-1)P_n^{(\nu)} \\ &= (n-\nu+1)(n-\nu+2)P_{n+1}^{(\nu-1)} - (n+\nu-1)(n+\nu)P_{n-1}^{(\nu-1)}. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, on a, après quelques calculs simples,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2-1)^2 P_n^{(\nu)} \\ &= + \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n-\nu+3)(n-\nu+4)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}^{(\nu-2)} \\ &\quad - 2 \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-1)(2n+3)} P_n^{(\nu-2)} \\ &\quad + \frac{(n+\nu-3)(n+\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-2}^{(\nu-2)}, \end{aligned} \right.$$

formule qui se transforme pour $\nu = 2$ en celle qui finit la Note de M. Hermite (*loc. cit.*, p. 83).

En multipliant la formule (22) par $(x^2 - 1)$, on en déduit, au moyen de la formule (21), la suivante

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2-1)^3 P_n^{(\nu)} \\ &= + \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n-\nu+3)(n-\nu+4)(n-\nu+5)(n-\nu+6)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} P_{n+3}^{(\nu-3)} \\ &\quad - 3 \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n-\nu+3)(n-\nu+4)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n+1)(2n+5) \cdot 2n-1} P_{n+1}^{(\nu-3)} \\ &\quad + 3 \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n+\nu-3)(n+\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n+1)(2n+3) \cdot 2n-3} P_{n-1}^{(\nu-3)} \\ &\quad - \frac{(n+\nu-5)(n+\nu-4)(n+n-3)(n+\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} P_{n-3}^{(\nu-3)}. \end{aligned} \right.$$

D'une façon analogue, en multipliant la formule (23) par $(x^2 - 1)$,

on obtient, au moyen de la formule (21), la valeur de $(x^2 - 1)^4 P_n^{(\nu)}$; et en calculant ainsi, de proche en proche, $(x^2 - 1)^5 P_n^{(\nu)}$, $(x^2 - 1)^6 P_n^{(\nu)}$, on est conduit enfin à la formule générale

$$(24) \quad \begin{cases} (x^2 - 1)^\lambda P_n^{(\nu)} = \sum_x (-1)^x \lambda_x A_{n,\nu}^{\lambda,x} P_{n+\lambda-2x}^{(\nu-\lambda)}, \\ (x = 0, 1, 2, \dots, \lambda; \quad \lambda = 1, 2, \dots, \nu) \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, \\ \lambda_1 &= \frac{\lambda(\lambda - 1)}{1 \cdot 2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_x &= \frac{\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - x + 1)}{1 \cdot 2 \dots x}, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_\lambda &= 1; \end{aligned}$$

et où

$$\begin{aligned} A_{n,\nu}^{\lambda,0} &= \frac{(n - \nu + 1)(n - \nu + 2) \dots (n - \nu + 2\lambda)}{(2n + 1)(2n + 3) \dots (2n + 2\lambda - 1)}, \\ A_{n,\nu}^{\lambda,1} &= [2(n + \lambda) - 3] \frac{(n - \nu + 1) \dots (n - \nu + 2\lambda - 2)}{(2n + 1)(2n + 3) \dots (2n + 2\lambda - 1)} \frac{(n + \nu - 1)(n + \nu)}{2n - 1}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_{n,\nu}^{\lambda,x} &= [2(n + \lambda - 2x) + 1] \frac{(n - \nu + 1) \dots (n - \nu + 2\lambda - 2x)}{(2n + 1)(2n + 3) \dots (2n + 2\lambda - 2x + 1)} \\ &\quad \times \frac{(n + \nu - 2x + 1) \dots (n + \nu)}{(2n - 2x + 1) \dots (2n - 1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_{n,\nu}^{\lambda,\lambda} &= \frac{(n + \nu - 2\lambda + 1)(n + \nu - 2\lambda + 2) \dots (n + \nu)}{(2n + 1)(2n - 2\lambda + 3)(2n - 2\lambda + 5) \dots (2n - 1)}. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $\lambda = \nu$, les numérateurs des coefficients $A_{n,\nu}^{\lambda,0}$, $A_{n,\nu}^{\lambda,1}$, ..., $A_{n,\nu}^{\lambda,\lambda}$ deviennent égaux entre eux et obtiennent la valeur commune

$$N = (n - \nu + 1)(n - \nu + 2) \dots (n + \nu);$$

par conséquent, on tire de la formule (24) la relation due à M. Hermite

$$(25) \quad (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)} = \sum_x (-1)^x \nu_x A_x P_{n+\nu-2x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, \nu),$$

et l'on trouve pour les coefficients A_x les valeurs suivantes

$$A_0 = \frac{N}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2\nu-1)},$$

$$A_1 = \frac{N(2n+2\nu-3)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2\nu-1)} \frac{1}{(2n-1)},$$

.....

$$A_x = \frac{N(2n+2\nu-4x+1)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2\nu-2x+1)} \frac{1}{(2n-2x+1)\dots(2n-1)},$$

.....

$$A_\nu = \frac{N}{(2n+1)(2n-2\nu+3)(2n-2\nu+5)\dots(2n-1)}.$$

4. Les fonctions sphériques de seconde espèce $Q_s(y)$ sont définies, d'après M. F. Neumann, par l'intégrale

$$Q_s(y) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_s(x) dx}{y-x} \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

Au moyen de cette expression et en ayant égard aux formules (1), (13), (3), (12), on reconnaît aisément (1) que les relations (1), (3), (12) ne changent pas, si l'on y remplace $P_n(x)$ par $Q_n(y)$. Or les relations (1), (3), (12) entraînent les autres; par conséquent : *Toutes les formules établies dans cette Note subsistent encore si l'on remplace les fonctions sphériques de première espèce $P_n(x)$ par les fonctions sphériques de seconde espèce $Q_n(y)$.*

(1) Voir ma Note citée, p. 139.