Bulletin de la S. M. F.

G. Fouret

Sur les points singuliers des équations différentielles à deux variables du premier ordre et du premier degré

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 128-132
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__128_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les points singuliers des équations différentielles à deux variables, du premier ordre et du premier degré; par M. G. Fouret.

1. En rendant homogène, par l'introduction d'une troisième variable, une équation différentielle à deux variables, du premier ordre et du premier degré, on la met sous la forme

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} L & M & N \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

L, M, N étant des fonctions homogènes, d'un même degré d'homogénéité, de x, y, z. Si l'on considère ces trois variables comme les coordonnées d'un point par rapport à un triangle de référence ABC, l'équation (1) définit un système de courbes que l'on peut appeler *courbes intégrales* de cette équation. Par un point quelconque du plan du triangle ABC passe une de ces courbes et une seule.

Il y a exception toutefois pour les points dont les coordonnées vérifient les équations

$$(2)\qquad \frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z},$$

et que l'on appelle *points singuliers* de l'équation différentielle. Supposons que L, M et N soient des fonctions algébriques entières d'un même degré k, c'est-à-dire, suivant une dénomination employée par M. Poincaré [1], que l'équation différentielle soit de $k^{\text{ième}}$ *dimension*. Alors *le nombre des points singuliers est* $k^2 + k + 1$.

Cette proposition a déjà été démontrée par M. Darboux, dans

(1) *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré* (*Rendiconti di Circolo matematico di Palermo*, t. V, p. 161).

son beau *Mémoire sur les équations différentielles algébriques* [1].

On peut aussi l'établir très simplement à l'aide des considérations suivantes, qui présentent en elles-mêmes quelque intérêt.

2. Remarquons d'abord qu'une droite quelconque

$$(3)\qquad Ax + By + Cz = 0$$

est touchée en k points par les courbes intégrales de l'équation (1). En effet, pour un pareil point, x, y, z, dx, dy, dz doivent vérifier simultanément les équations (1), (3) et

$$(4)\qquad A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0.$$

Mais l'équation (1) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} L & M & AL + BM + CN \\ x & y & Ax + By + Cz \\ dx & dy & A\,dx + B\,dy + C\,dz \end{vmatrix} = 0$$

et se réduit, en vertu des équations (3) et (4), à

$$AL + BM + CN = 0.$$

Cette équation, de degré k, détermine, concurremment avec l'équation (3), les coordonnées de k points, qui sont les points de contact de la droite (3) avec les courbes intégrales. On voit ainsi que ces courbes forment un *système* dont les *caractéristiques* sont 1 et k.

3. De ce qui précède on conclut immédiatement que *le lieu des points de contact des tangentes menées d'un même point* P *aux courbes intégrales est de degré $k+1$*; car, par le point P, passe une de ces courbes, et toute droite issue de P est touchée par celles-ci en k points.

Il est d'ailleurs facile de former l'équation de ce lieu. Soient, en effet, a, b, c les coordonnées du point P. La figure montre

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. II, p. 84.

Le même théorème, énoncé sous une forme un peu différente, est également démontré dans les *Leçons de Géométrie* de Clebsch et Lindemann (t. I, p. 1001).

immédiatement qu'entre ces coordonnées et celles du point de contact d'une tangente menée de P à l'une des courbes existent les relations

$$\frac{dx}{a-x} = \frac{dy}{b-y} = \frac{dz}{c-z}.$$

L'élimination de dx, dy, dz entre ces relations et l'équation (1) fournit l'équation du lieu sous la forme

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} L & M & N \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

On reconnaît là l'équation d'une courbe de degré $k+1$ qui passe par le point P. On voit de plus que *cette courbe passe par les points singuliers de l'équation différentielle* (1); car son équation est évidemment vérifiée par les systèmes de valeurs de x, y, z, qui vérifient les équations (2).

4. Lorsque l'on fait varier le point P, et par conséquent a, b, c, de toutes les manières possibles, les courbes (5) varient en formant un réseau d'une espèce particulière, dont certaines propriétés intéressantes ont été signalées par Laguerre [1]. Si le point P se déplace sur une droite Δ, les courbes (5), correspondant aux diverses positions que prend alors ce point, forment un faisceau; car, les coordonnées a, b et c étant liées par une relation linéaire, l'équation (5) ne contient plus qu'un paramètre arbitraire au premier degré. Les courbes du faisceau ont en commun $(k+1)^2$ points, parmi lesquels se trouvent nécessairement les k points en lesquels la droite Δ est tangente à des courbes intégrales (1). Les k^2+k+1 autres sont les points singuliers de l'équation différentielle, dont le nombre se trouve ainsi déterminé.

5. Si l'on suppose $k=1$, l'équation (1) se réduit à l'équation différentielle de Jacobi. Les points singuliers, qui sont alors au nombre de trois, ne suffisent pas pour déterminer complètement l'ensemble des courbes intégrales. Il faut de plus connaître un

---

[1] *Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VI, p. 129 à 136).

certain rapport anharmonique. On peut alors, à l'aide de ces données, obtenir, en quelque sorte géométriquement, l'intégrale de l'équation de Jacobi, ainsi que je l'ai fait voir, il y a quelques années ([1]).

Dans l'hypothèse $k = 2$, les points singuliers, au nombre de sept, déterminent complètement, quand ils sont distincts, le système des courbes intégrales ([2]).

La connaissance de ces points permet alors, comme on va le voir, de construire géométriquement, d'une manière élégante, la tangente, en un point quelconque du plan, à la courbe intégrale qui y passe. Soit, en effet, Θ la tangente, en un point M, à une de ces courbes. Le lieu des points de contact des tangentes menées aux courbes intégrales par un point quelconque P de Θ est une cubique (art. 3), et les cubiques qui correspondent ainsi aux divers points P de Θ, forment un faisceau, c'est-à-dire ont neuf points communs, dont sept sont les points singuliers donnés, et les deux autres sont les points où les courbes intégrales touchent Θ. Or, par hypothèse, un de ces deux derniers points est le point M. L'autre, étant joint à M, donnera précisément la droite Θ. Ainsi, *étant donnés, dans un plan, sept points distincts, que l'on considère comme les points singuliers d'une équation différentielle du premier ordre, du premier degré et de seconde dimension, la tangente, en un point* M *quelconque du plan, à la courbe intégrale qui y passe, s'obtient en joignant ce point au neuvième point commun aux cubiques qui passent par* M *et par les sept points singuliers.*

6. J'ai indiqué, il y a quelques années, comment les relations de position des sept points singuliers permettent, dans certains cas, de prévoir la nature et la forme de l'intégrale ([3]). Je n'y reviendrai pas ici. Je rappellerai seulement, pour la généraliser, cette remarque immédiate qu'une équation différentielle

---

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXXVIII, p. 1693 et 1837.

([2]) Lorsque k dépasse 2, les $k^2 + k + 1$ points singuliers ne sont pas indépendants les uns des autres, comme j'ai eu déjà l'occasion de le faire remarquer (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXXXVI, p. 586).

([3]) *Ibid.*

définissant un faisceau de coniques est de deuxième dimension et a pour points singuliers les quatre points communs à ces coniques et les trois points d'intersection de leurs couples de sécantes communes. Considérons de même le faisceau le plus général de courbes planes du $m^{\text{ième}}$ degré. Les points de contact de ces courbes avec une droite quelconque de leur plan étant, comme on sait, au nombre de $2(m-1)$, la dimension de l'équation différentielle de ce faisceau sera égale à ce nombre. Si du nombre total des points singuliers, égal à $4(m-1)^2+2(m-1)+1$, on déduit le nombre m^2 des points communs aux courbes du faisceau, on obtient le nombre total des points doubles de l'ensemble de ces courbes, égal, comme on le sait d'ailleurs, à $3(m-1)^2$.

7. Je vais, pour terminer, donner un nouvel exemple du parti que l'on peut tirer des points singuliers d'une équation différentielle, pour l'intégration de cette équation. On connaît les propositions si remarquables données par M. Darboux, dans le Mémoire que j'ai déjà rappelé, d'après lesquelles, à l'aide d'un nombre suffisant d'intégrales particulières d'une équation différentielle, on peut obtenir l'intégrale générale.

La proposition suivante me paraît pouvoir être utilisée, dans la recherche de ces intégrales particulières : *Si une équation différentielle du premier degré et de $k^{\text{ième}}$ dimension a plus de $mk+n$ points sur une courbe algébrique du $m^{\text{ième}}$ ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe, elle admet cette courbe comme intégrale particulière.* C'est là une conséquence immédiate d'un théorème bien connu, consistant en ce que *les courbes d'un système, de caractéristiques μ et ν, touchent une courbe algébrique du $m^{\text{ième}}$ ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe en un nombre de points au plus égal à $m\nu+n\mu$.* Il suffit de supposer $\mu=1$, $\nu=k$ et de remarquer que toute courbe passant par un point singulier du système est touchée en un point par une des courbes de ce système, pour en conclure la proposition énoncée.