BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Quelques remarques relatives aux fonctions réciproques

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 142-144

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__142_0>

Quelques remarques relatives aux fonctions réciproques;
par M. C.-A. LAISANT.

1. Une équation réciproque est, comme on le sait, celle dont le premier membre se compose d'un polynôme entier où les termes équidistants des extrêmes sont égaux. En appelant m le degré de ce polynôme $f(x)$, il s'ensuit que

$$f(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right). \tag{1}$$

Nous pouvons prendre cette relation (1) comme définition et appeler *fonction réciproque de degré m* toute fonction qui y satisfait.

On remarquera que ax^m peut toujours être regardée, en vertu de cette définition, comme une fonction réciproque de degré $2m$.

2. Si nous formons successivement les dérivées première et seconde des deux membres de l'équation (1), nous aurons

$$f'(x) = m x^{m-1} f\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-2} f'\left(\frac{1}{x}\right), \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} f''(x) = {} & m(m-1)x^{m-2} f\left(\frac{1}{x}\right) \\ & - 2(m-1)x^{m-3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + x^{m-4} f''\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Posons

$$\varphi(x) = (m-1) f'(x) - x f''(x). \tag{4}$$

Il viendra, en vertu des relations (2) et (3),

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= (m-1)x^{m-2} f'\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-3} f''\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x^{m-2}\left[(m-1) f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} f''\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= x^{m-2} \varphi\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Par conséquent, $f(x)$ étant réciproque de degré m, la fonction $\varphi(x)$ ou $(m-1)f'(x)-xf''(x)$ est réciproque de degré $m-2$.

En appliquant ce résultat à la fonction $\varphi(x)$ elle-même, on reconnaît sans peine que la fonction

$$(m-2)(m-3)f''(x)-2(m-3)xf'''(x)+x^2f^{\text{iv}}(x)$$

est réciproque de degré $m-4$. De même, la fonction

$$\begin{aligned}&(m-3)(m-4)(m-5)f'''(x)\\&\quad-3(m-4)(m-5)xf^{\text{iv}}(x)+3(m-5)x^2f^{\text{v}}(x)-x^3f^{\text{vi}}(x)\end{aligned}$$

est réciproque de degré $m-6$, et il est facile de généraliser.

3. Les propriétés qui suivent sont pour ainsi dire évidentes, en vertu de l'équation de définition (1), et il suffira de les énoncer.

1° Si deux fonctions $f(x)$, $F(x)$ sont réciproques de même degré m, la fonction $Af(x)+BF(x)$, A et B étant deux constantes quelconques, est réciproque de même degré.

2° Si $f_1(x)$, $f_2(x)$ sont des fonctions réciproques de degrés m_1 et m_2 respectivement, la fonction $f_1(x)\times f_2(x)$ est réciproque de degré m_1+m_2.

3° Dans la même hypothèse, la fonction $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ est réciproque de degré m_1-m_2.

4° $f(x)$ étant une fonction réciproque de degré m, $[f(x)]^p$ est une fonction réciproque de degré mp.

4. D'après la définition adoptée ci-dessus, une fonction $f(x)$ est réciproque de degré zéro, quand on a

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right). \tag{6}$$

D'autre part, nous pouvons écrire la relation (1) de définition sous la forme

$$\frac{f(x)}{x^{\frac{m}{2}}}=\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{2}}}.$$

Par conséquent, si $f(x)$ est réciproque de degré m, la fonction $f(x) : x^{\frac{m}{2}}$ sera réciproque de degré zéro.

En écrivant $f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x)$ étant une fonction quelconque, on obtient nécessairement une fonction réciproque de degré zéro.

Il en est de même si l'on forme $f\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Les propriétés du n° 2 ci-dessus se simplifient quand on considère des fonctions réciproques de degré zéro. La relation (4) nous donne, en effet,

$$-\varphi(x) = f'(x) + x f''(x).$$

Cette fonction est donc réciproque de degré — 2, lorsque $f(x)$ est réciproque de degré zéro; et, par suite,

$$x f'(x) + x^2 f''(x)$$

est réciproque de degré zéro.

On voit de même que

$$x^2 f''(x) + x^3 f'''(x) + \frac{x^4}{2.3} f^{\text{IV}}(x),$$

$$x^3 f'''(x) + x^4 f^{\text{IV}}(x) + \tfrac{1}{4} x^5 f^{\text{V}}(x) + \frac{x^6}{3.4.5} f^{\text{VI}}(x)$$

sont également des fonctions réciproques de degré zéro.

En combinant ces trois fonctions par l'addition de la première et de la troisième, et la soustraction de la seconde, on a

$$x f'(x) + \tfrac{5}{6} x^4 f^{\text{IV}}(x) + \tfrac{1}{4} x^5 f^{\text{V}}(x) + \tfrac{1}{60} x^6 f^{\text{VI}}(x),$$

qui jouit aussi de la même propriété.