BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. BIOCHE

Sur les surfaces gauches dont les lignes de courbure possèdent une propriété donnée

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 42-44
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__42_1>

Sur les surfaces gauches dont les lignes de courbure possèdent une propriété donnée; par M. Ch. Bioche.

1. Si l'on détermine un point sur une surface gauche par la

distance r de ce point au point central correspondant, et par l'arc s de la ligne de striction terminé en ce point central, l'équation des lignes de courbure peut s'écrire

$$\frac{dr^2}{ds^2} + \varphi(r)\frac{dr}{ds} + \psi(r) = 0,$$

φ et ψ étant des polynômes du second degré en r, dont les coefficients sont fonctions de s. On peut reconnaître, par une discussion simple, que, pour que les expressions de $\frac{dr}{ds}$ fournies par cette équation soient rationnelles en r, il faut et il suffit que $\psi(r)$ soit identiquement nul (voir *Bull. de la Soc. math.,* p. 121; 1888). Les surfaces correspondantes sont celles dont le paramètre de distribution est constant, et dont la ligne de striction est ligne de courbure. Je les appellerai, pour abréger, *surfaces* Σ.

2. On déduit immédiatement de ce qui précède que, si un système de lignes de courbure d'une surface réglée possède une propriété exprimable par une équation différentielle du premier ordre rationnelle en r, cette surface appartient à la catégorie des surfaces Σ, à moins que l'équation différentielle en question ne soit vérifiée pour toutes les courbes tracées sur la surface, c'est-à-dire ne se réduise à une identité.

3. Cette remarque permet de résoudre la question suivante : Quelles sont toutes les surfaces dont un système de lignes de courbure est composé de trajectoires des génératrices? Il suffit d'exprimer la condition donnée par une équation du premier ordre. Or, si une ligne de courbure coupe les génératrices sous un angle constant i, en chaque point de cette ligne l'asymptotique fait avec la génératrice l'angle $2i$, et l'on trouve facilement

$$\tang^2 2i = F(r),$$

F étant une fonction rationnelle. Un des systèmes des lignes de courbure des surfaces cherchées vérifie donc l'équation

$$\frac{d}{ds}F(r) = 0.$$

Cette équation se réduit à une identité pour l'hélicoïde minimum, et seulement dans ce cas; car cette surface est la seule dont les asymptotiques soient trajectoires des génératrices. Ce cas écarté, on trouve des surfaces Σ dont les lignes de courbure sont données par

$$\frac{dr}{ds} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dr}{ds} + \varphi(r) = 0.$$

4. Le second système ne peut être composé de trajectoires, car $\varphi(r)$ contient un terme du second degré en r. Or j'ai démontré (*Annales de la Faculté de Toulouse;* 1889) qu'un système vérifiant une équation de Riccati où le terme en r^2 figure effectivement ne peut être composé de trajectoires. Si le premier système est composé de trajectoires, la ligne de striction, qui est l'une d'elles, est géodésique, d'après un théorème de M. Bonnet. Les surfaces cherchées ont donc leur ligne de striction, ligne de courbure et ligne géodésique, le paramètre de distribution étant constant : ce sont des surfaces de révolution.

Donc *les seules surfaces dont un système de lignes de courbure soit composé de trajectoires sont :*

1° La *surface gauche de révolution :* les trajectoires considérées sont les parallèles;

2° L'*hélicoïde minimum :* toutes les lignes de courbure sont trajectoires, et l'angle est de 45° pour toutes.

5. Sur les surfaces Σ, le long d'une ligne de courbure de même système que la ligne de striction, la courbure totale est constante, et l'angle du plan tangent avec le plan central est constant. La remarque dont je me suis servi permet de reconnaître que les surfaces Σ sont les seules jouissant d'une de ces propriétés. On peut voir de même que, si le long de chaque ligne de courbure d'un système la courbure moyenne est constante, la surface correspondante est une surface de révolution ou un hélicoïde minimum.