BULLETIN DE LA S. M. F.

A. E. PELLET

Sur la rectification approximative d'un arc de courbe

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 5-8
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__5_1>

Sur la rectification approximative d'un arc de courbe;
par M. A.-E. Pellet.

1. Sur la tangente en un point M d'une courbe, prenons des longueurs égales de part et d'autre du point M, ML, ML'; puis sur la normale au point M et du côté du centre de courbure, une longueur égale à trois fois le rayon de courbure MC; joignons le point C aux points L et L'; soient P et P' les points de rencontre de LC, L'C avec la courbe; la différence de l'arc PP' et de la ligne LL' est un infiniment petit du 5^e ordre.

En effet, soit

$$y = ax^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \dots$$

l'équation de la courbe. Son arc, compté à partir du point M, aura pour longueur

$$S = x + 2a^2\frac{x^3}{3} + 3aa_1\frac{x^4}{2} + (9a_1^2 + 16aa_2 - 4a^4)\frac{x^5}{10} + \dots.$$

La ligne ML′ est égale à

$$\frac{x}{1 - \frac{2ay}{3}} = x + \frac{2a^2}{3}x^3 + \frac{2aa_1}{3}x^4 + \left(\frac{2aa_2}{3} + \frac{4a^4}{9}\right)x^5 + \dots$$

et enfin la différence d de l'arc PP′ et de la droite LL′ est égale à

$$d = \frac{81a_1^2 + 84aa_3 - 76a^4}{45}x^5 + \dots;$$

d est une fonction impaire de x.

2. Pour la conique $y = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, il vient

$$y = Ax^2 + 2BAx^3 + (4B^2A + CA^2)x^4 + \dots$$

et

$$d = \frac{660\,B^2A^2 + 84\,CA^3 - 76\,A^4}{45}x^5 + \dots.$$

Cherchons les points pour lesquels cette différence est un infiniment petit du septième ordre. Il faut qu'on ait

$$165\,B^2 + 21\,CA - 19\,A^2 = 0.$$

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de la conique rapportée à son centre et à ses axes, on a

$$B^2 - AC = \frac{-1}{a^2b^2}, \qquad A + C = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

et la relation précédente devient

$$205\,A^2 - 186\,\frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}A + \frac{165}{a^2b^2} = 0.$$

Les points cherchés sont à l'intersection de la conique avec le diamètre conjugué de l'axe nouveau des x; ρ^2 étant le carré de leur distance au centre, on a par le théorème d'Apollonius

$$\frac{1}{A} + \rho^2 = a^2 + b^2;$$

d'où, pour l'équation en ρ^2,

$$165\rho^4 - 144(a^2+b^2)\rho^2 + 205\,a^2b^2 - 21(a^2+b^2)^2 = 0.$$

Pour une ellipse $a^2 > b^2 > 0$, les valeurs de ρ^2 comprises entre a^2 et b^2 seules donneront des points réels. Pour $\rho^2 = b^2$, le premier membre de l'équation prend la valeur $(19\,b^2 - 21\,a^2)a^2$, quantité négative; pour $\rho^2 = a^2, (19\,a^2 - 21\,b^2)b^2$; il faut qu'elle soit positive pour qu'il y ait une racine comprise entre b^2 et a^2.

Pour l'hyperbole $a^2 > 0$, $b^2 = -b'^2$, b' étant réel, les racines de l'équation en ρ^2 sont de signes contraires; et la racine positive est supérieure à a^2, puisque pour $\rho^2 = a^2$, le premier membre de l'équation devient $-(19\,a^2 + 21\,b'^2)\,b'^2$, quantité négative.

Pour la parabole

$$(x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 = 2p(x\cos\varphi - y\sin\varphi),$$

on a $B^2 = AC$; la relation devient

$$186\,C - 19\,A = 0,$$

ou, par rapport à l'angle φ,

$$186\cos^2\varphi - 19\sin^2\varphi = 0.$$

On a donc toujours deux points pour lesquels la différence d est un infininiment petit du septième ordre.

3. Soit

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + z_3 + \dots$$

l'équation d'une surface en un point ordinaire. L'élément dS de cette surface a pour valeur $dx\,dy$ multiplié par

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = 1 + \frac{x^2}{2R_1^2} + \frac{y^2}{2R_2^2} + \left(\frac{R_1}{x z_{3x}} + \frac{R_2}{y z'_{3y}}\right) + \dots.$$

Prenons sur la normale, à cette surface, un point situé à une distance $\mathfrak{R}$ de l'origine et joignons-le au point x, y de la surface; la ligne obtenue perce le plan tangent au point dont les coordonnées sont

$$X = \frac{\mathfrak{R}x}{\mathfrak{R} - z}, \qquad Y = \frac{\mathfrak{R}y}{\mathfrak{R} - z}.$$

La projection conique de l'élément de la surface aura pour valeur

$$d\sigma = \begin{vmatrix} X'_x & X'_y \\ Y'_x & Y'_y \end{vmatrix} dx\,dy = \frac{\mathfrak{R} + z_2 + 2z_3 + \ldots + (i-1)z_i + \ldots}{\mathfrak{R}\left(1 - \frac{z}{\mathfrak{R}}\right)^3}$$

ou

$$d\sigma = 1 + \frac{4z_2}{\mathfrak{R}} + \frac{5z_3}{\mathfrak{R}} + \ldots.$$

La différence $dS - d\sigma$ est égale à $D\,dx\,dy$,

$$D = \frac{x^2}{2R_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{4}{\mathfrak{R}}\right) + \frac{y^2}{2R_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{4}{\mathfrak{R}}\right) + \frac{xz'_{3x}}{R_1} + \frac{yz'_{3y}}{R_2} - \frac{5z_3}{\mathfrak{R}} + \ldots.$$

Pour un ombilic $R_1 = R_2$, et si l'on fait $\mathfrak{R} = 4R_1$, il vient

$$D = \frac{7}{4}\frac{z_3}{R_1} + \ldots,$$

à cause de la relation

$$xz'_{3x} + yz'_{3y} = 3z_3.$$

Pour un point parabolique $\frac{1}{R_2} = 0$, et si l'on fait $\mathfrak{R} = 4R_1$, il vient

$$D = \frac{4xz'_{3x} - 5z_3}{4R_1} + \ldots.$$

Dans l'intégrale double $\int\int D\,dx\,dy$ étendue à tous les points de l'aire située dans une courbe fermée symétrique par rapport à l'origine, un cercle, par exemple, de rayon r, les termes de degré impair de D disparaissent, et, dans le cas où l'origine est un ombilic ou un point parabolique, cette intégrale ou la différence $S - \sigma$ est un infiniment petit du sixième ordre par rapport à r.