SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 35-49
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__35_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 AVRIL 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Demoulin : *Sur les courbures des surfaces polaires réciproques et des surfaces inverses.*

M. Fouret présente quelques observations sur le même sujet.

M. d'Ocagne : *Sur les normales menées d'un point à une parabole.*

M. Fouret : *Sur un mode de génération des lignes asymptotiques de la surface de Steiner.*

M. Bioche : *Sur les surfaces réglées qui se transforment homographiquement en elles-mêmes.*

M. Raffy : *Sur le problème général de la déformation des surfaces et sur certains cas particuliers.*

SÉANCE DU 20 AVRIL 1892.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Communications :

M. d'Ocagne : *Construction de la parabole déterminée par un point, le centre de courbure en ce point, et la direction de l'axe.*

M. Fouret présente quelques observations sur le même sujet.

M. Bioche montre que, étant donnée une cubique gauche dont les trois directions asymptotiques sont rectangulaires, si on la coupe par des plans parallèles, le lieu des points de rencontre des hauteurs des triangles ainsi déterminés est la corde perpendiculaire à la direction des plans.

M. Fouret fait la Communication suivante :

Remarques sur les limites des racines d'une équation algébrique.

1. Dans les traités d'Algèbre, on restreint généralement la por-

tée pratique de la règle de Newton, qui donne une limite supérieure des racines d'une équation, en s'imposant de trouver pour cette limite un nombre positif. Cette règle, dans la plus grande généralité qu'elle comporte, doit s'énoncer ainsi :

I. *Toute valeur de x, positive ou négative, dont la substitution dans* $F(x)$ *et dans ses dérivées donne des résultats de même signe, est une limite supérieure des racines de l'équation* $F(x) = 0$.

Supposons que l'on trouve une valeur négative $-l$ de x satisfaisant à ces conditions. On en tirera cette double conclusion : 1° que l'équation n'a pas de racine positive; 2° qu'elle ne peut avoir de racine négative supérieure à $-l$.

La règle de Newton se complète par la suivante, que nous avons démontrée dans une précédente Communication (1) :

II. *Toute valeur de x, positive ou négative, dont la substitution dans* $F(x)$ *et ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs, est une limite inférieure des racines de* $F(x) = 0$.

Quand on trouvera une valeur positive k de x, satisfaisant à ces conditions, on en conclura : 1° que l'équation n'a pas de racine négative; 2° qu'elle ne peut avoir de racine positive inférieure à k.

Pour résoudre une équation numérique, il y aura généralement avantage à lui appliquer tout d'abord ces deux règles. Ce n'est qu'ensuite que l'on devra subsidiairement, et s'il y a lieu, déterminer une limite inférieure des racines positives et une limite supérieure des racines négatives, en se servant des transformées en $\frac{1}{x}$ et en $-\frac{1}{x}$ de l'équation proposée.

2. On peut remarquer que l'application de la règle II équivaut à l'application de la règle I à la transformée en $-x$.

Posons, en effet,

$$G(x) \equiv F(-x).$$

(1) Même Tome, p. 4.

On déduit de là

$$G'(x) \equiv - F'(-x), \quad G''(x) \equiv F''(-x), \quad G'''(x) \equiv - F'''(-x), \quad \ldots.$$

Or, il résulte immédiatement de ces identités que toute valeur λ de x, qui rend positifs $G(x)$, c'est-à-dire $F(-x)$, et ses dérivées, est tel que la substitution de $-\lambda$ dans $F(x)$ et ses dérivées successives donne des résultats alternativement positifs et négatifs.

Ainsi se trouve établie la règle II par un raisonnement différent de celui qui nous a servi à la démontrer précédemment ([1]).

3. On peut encore, pour déterminer une limite supérieure des racines d'une équation, employer la règle suivante :

III. *Un nombre positif est une limite supérieure des racines de l'équation*

$$(1) \quad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2} x^2 + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

lorsque, substitué à x, il fait prendre des valeurs de même signe à la suite des polynômes

$$(2) \quad \begin{cases} F\ (x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2} x^2 + a_{m-1} x + a_m, \\ F_1(x) \equiv a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + a_2 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2} x + a_{m-1}, \\ F_2(x) \equiv a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + a_2 x^{m-4} + \ldots + a_{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{m-2}(x) \equiv a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \\ F_{m-1}(x) \equiv a_0 x + a_1, \\ F_m\ (x) \equiv a_0. \end{cases}$$

Cette règle, due à M. Thibaut ([2]), donne une limite supérieure toujours positive et au moins égale, comme on le sait, à celle que l'on obtient par la règle de Newton qui, sous ce rapport, doit lui être préférée. Elle a toutefois l'avantage sur celle-ci d'être d'une application plus rapide.

On peut en déduire, pour déterminer une limite inférieure des racines, la règle suivante qui ne nous paraît pas avoir été remarquée :

IV. *Une valeur négative de x est une limite inférieure des*

([1]) *Loc. cit.*

([2]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. II, p. 517.

racines de l'équation (1), *lorsqu'elle fait prendre des valeurs alternativement positives et négatives aux polynômes de la suite* (2).

En effet, posons $F(-x) \equiv G(x)$. La quantité $-\lambda$ sera une limite inférieure des racines de l'équation (1), si λ est une limite supérieure des racines de $G(x) = 0$, c'est-à-dire donne, étant substituée à x, des valeurs de même signe aux polynômes $G(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., $G_{m-1}(x)$, $G_m(x)$, déduits les uns des autres d'après la loi qui a servi à former les polynômes de la suite (2). Mais on voit immédiatement que l'on a

$$G_1(x) \equiv -F_1(-x), \quad G_2(x) \equiv F_2(-x), \quad G_3(x) \equiv -F_3(-x), \quad \ldots.$$

Donc, si $x = \lambda$ fait prendre des valeurs de même signe à $G(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., $x = -\lambda$ donnera des valeurs alternativement positives et négatives à $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., et $-\lambda$ sera bien une limite inférieure des racines de $F(x) = 0$.

SÉANCE DU 4 MAI 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Hermann : *Sur un nouveau procédé de Cryptographie.*

M. Raffy : *Sur certaines surfaces applicables les unes sur les autres et dépendant d'une fonction arbitraire.*

M. Demoulin : *Sur une propriété des courbes tétraédrales.*

M. Fouret fait la Communication suivante :

Remarque historique concernant une propriété mécanique de la lemniscate.

Parmi les propriétés qui caractérisent la lemniscate de Bernoulli, on remarque la suivante : c'est la *courbe sur laquelle doit se mouvoir un point pesant, dans un plan vertical, pour décrire, sans vitesse initiale, à partir d'un point fixe, un arc quelconque dans l'intervalle de temps qu'il lui faudrait pour parcourir, en partant du repos, la corde sous-tendant cet arc.*

C'est à tort que la découverte de cet intéressant théorème est attribuée tantôt à Fuss, tantôt à Saladini. En réalité, l'origine en remonte plus haut, ainsi que nous avons eu l'occasion de le reconnaître dernièrement. La recherche d'une courbe satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer est, en effet, traitée analytiquement pages 166 et 167 du tome II de la *Mécanique d'Euler* (1), publiée en 1736. Saladini, sans citer Euler, donne une solution qui diffère peu de la sienne (*Memorie del Istituto nazionale italiano,* t. I, année 1804). Quant à Fuss, qui ne fait aucune allusion à ces précédents, sa solution basée sur des considérations ingénieuses, généralisées depuis (2), a du moins le mérite d'une plus grande simplicité (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg,* t. IX, année 1815). Il y a lieu toutefois d'être surpris que Fuss qui fut, comme on le sait, le disciple et le commentateur d'Euler, ait ignoré ou ait sciemment omis de mentionner l'antériorité de ce dernier.

Pour compléter ce petit historique, nous rappellerons que M. Ossian Bonnet, en 1844, a repris et généralisé la question en démontrant que la lemniscate jouit encore de la propriété indiquée plus haut, lorsque le mobile est sollicité par une force dirigée vers un point fixe et proportionnelle à sa distance à ce point fixe (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. IX, p. 116). Il était alors naturel de se proposer de trouver la loi la plus générale à laquelle il faut soumettre la force agissant sur un mobile, pour faire décrire à celui-ci une lemniscate dans les conditions susénoncées. Nous avons résolu la question (*Journal de l'École Polytechnique,* LVI[e] cahier, p. 171-211, année 1886), en donnant l'expression générale, qui dépend d'une fonction arbitraire, du potentiel dont doit dériver la force. De cette expression on conclut, en particulier, que la seule force centrale, répondant aux conditions du problème, est celle qui est proportionnelle à la distance du mobile au centre fixe : c'est le cas traité par M. Bonnet.

---

(1) Il y a lieu de remarquer que l'auteur ne donne pas le nom de *lemniscate* à la courbe qu'il obtient et dont il trouve cependant bien l'équation connue en coordonnées cartésiennes.

(2) *Voir* une Note de M. Rispal (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. XXI, p. 225-230, année 1847) et deux Notes de M. Durrande (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXXVIII, année 1874, p. 1550 et 1697).

SÉANCE DU 18 MAI 1892.

PRÉSIDENCE DE M. DE PRESLE.

Communications :

M. Demoulin : *Détermination explicite des courbes dont les tangentes font partie d'un complexe tétraédral.*

M. Raffy : *Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces.*

M. Lery : *Sur un problème d'Analyse indéterminée.*

M. Félix Lucas revient sur un théorème relatif aux *intersections de trois quadriques,* qu'il a fait connaître à la séance du 18 juin 1890, et qui a été publié au t. XIX du *Bulletin* (p. 118). Il fait observer que cette proposition rentre dans une série de théorèmes que M. Picquet a démontrés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* en 1865 (2[e] série, t. IV, p. 71 et suiv.).

M. Schlegel adresse un Mémoire intitulé : *Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions.*

M. Catalan adresse la Note suivante :

Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique.

[Addition (1)].

VI. — *Autres séries elliptiques.*

13. Soit encore la formule de Cauchy

$$(1) \quad (1+x)(1+tx)\ldots(1+t^{n-1}x) = 1 + T_{n,1}x + \ldots + T_{n,p}x^p + \ldots + T_{n,n}x^n,$$

dans laquelle

$$T_{n,p} = \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\ldots(1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^p)}\, t^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Si l'on divise les deux membres par $1+x$, on a

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+tx)(1+tx^2)\ldots(1+t^{n-1})x \\ \quad = \begin{array}{c|c|l} 1 + T_{n,1} & x + T_{n,2} & x^2 + \ldots + T_{n,n}\, x^{n-1}; \\ -\ 1 & -T_{n,1} & \\ & +\ 1 & \end{array} \end{array} \right.$$

---

(1) *Voir* le *Bulletin,* t. XIX, p. 124 et 145.

et, si n devient infini :

$$(24)\qquad (1+tx)(1+t^2x)(1+t^3x)\ldots = 1 + \left.\begin{array}{r} T_1 \\ -1 \\ \end{array}\right| x + \left.\begin{array}{r} T_2 \\ -T_1 \\ +1 \end{array}\right| x^2 + \ldots \text{ (1)}.$$

Or

$$T_1 - 1 = \frac{1}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t},$$

$$T_2 - T_1 + 1 = \frac{t}{(1-t)(1-t^2)} - \frac{t}{1-t} = \frac{t^3}{(1-t)(1-t^2)},$$

$$T_3 - T_2 + T_1 - 1 = \frac{t^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} - \frac{t^3}{(1-t)(1-t^2)} = \frac{t^6}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, si l'on fait $x = \pm 1$, $t = q$:

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots \\ &\quad = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots \\ &\quad = 1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

Le premier membre de l'égalité (25) est $\beta\beta' = \frac{1}{\alpha}$; le premier membre de l'égalité (26) est $\alpha\alpha'$. Donc, d'après des formules connues (2),

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &1 + \varphi(1)q + \varphi(2)q^2 + \varphi(3)q^3 + \ldots \\ &\quad = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \ldots \\ &\quad = 1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \ldots \end{aligned}\right.$$

---

(1) T_p représente $\dfrac{t^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^p)}$.

(2) *Recherches*..., p. 2, 3, 6.

14. *Remarque.* — L'égalité (24) est la même chose que

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} &(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\ldots \\ &= 1 + \frac{q}{1-q}x + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}x^2 + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3 + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Au lieu de celle-ci, Jacobi a trouvé ([1])

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &(1+qx)(1+q^3x)(1+q^5x)\ldots \\ &= 1 + \frac{q}{1-q^2}x + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}x^3 + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}x^3 + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Donc, en faisant $x = \pm 1$:

$$(31)\quad \beta = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots ,$$

$$(32)\quad \alpha = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots .$$

Ces deux formules ont été données précédemment ([2]). En outre, la première est déjà ancienne ([3]).

VII. — *Autres théorèmes d'Arithmétique.*

15. Dans l'égalité (26) :

la fraction

$$\frac{q}{1-q} = q \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 1) q^n ;$$

la fraction

$$\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} = q^3 \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 2) q^n ;$$

la fraction

$$\frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} = q^6 \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 3) q^n ;$$

etc. ([4]).

Si le second membre est développé sous la forme

$$1 + A_1 q + A_2 q^2 + A_3 q^3 + A_4 q^4 + \ldots ,$$

([1]) *Fundamenta*, p. 180.

([2]) *Bulletin*, t. XIX, p. 148, 149.

([3]) *Recherches...*, p. 52.

([4]) *Recherches...*, p. 47. $F(n, p)$ représente *le nombre de décompositions de n, en parties, égales ou inégales, non supérieures à p.* On suppose $F(0, p) = 1$.

il doit être identique avec

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \ldots.$$

Conséquemment [1] :

$$A_1 = -F(0,1) = -1,$$
$$A_2 = -F(1,1) = -1,$$
$$A_3 = -F(2,1) + F(0,2) = -1 + 1 = 0,$$
$$A_4 = -F(3,1) + F(1,2) = -1 + 1 = 0,$$
$$A_5 = -F(4,1) + F(2,2) = -1 + 2 = +1,$$

etc.; puis ce théorème :

La quantité

$$-F(n-1, 1) + F(n-3, 2) - F(n-6, 3) + F(n-10, 4) - \ldots$$

nulle si n n'est pas pentagonal, égale ± 1 *dans les autres cas.*

16. L'égalité (25) conduit à un théorème qui a de l'analogie avec celui-ci [2].

Liège, septembre 1891.

SÉANCE DU 1er JUIN 1892.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Fouret : *Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques.*

M. Bioche : *Sur un problème relatif à l'ellipse.*

M. d'Ocagne : *Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane.*

M. Demoulin fait la Communication suivante :

Quelques remarques relatives à la théorie des courbes gauches.

1. Nous rappellerons tout d'abord quelques résultats bien connus concernant la cinématique des systèmes invariables.

---

(1) *Recherches*..., p. 61, Table V.

(2) *Recherches*..., p. 48.

Considérons le trièdre trirectangle $Oxyz$. Le mouvement le plus général de ce trièdre peut être réalisé par le déplacement du point O accompagné d'une rotation ω autour d'un axe passant par ce point. Soient ξ, η, ζ les projections, sur les axes Ox, Oy, Oz, de la vitesse du point O et p, q, r les projections, sur les mêmes axes, du vecteur qui représente la rotation ω en grandeur, direction et sens. Les équations de l'axe hélicoïdal correspondant au déplacement infiniment petit du trièdre $Oxyz$ sont

$$(1) \qquad \frac{qz - ry + \xi}{p} = \frac{rx - pz + \eta}{q} = \frac{py - qx + \zeta}{r} = \frac{V}{\omega},$$

V désignant la vitesse commune aux différents points de l'axe hélicoïdal.

2. Soient Ox, Oy, Oz respectivement la tangente, la normale principale et la binormale en un point quelconque O d'une courbe gauche (Γ).

Cherchons l'axe hélicoïdal relatif au mouvement élémentaire du trièdre formé par ces trois droites.

Si l'on suppose la vitesse du point O constante et égale à l'unité, on a ([1])

$$\xi = 1, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$
$$p = -\frac{1}{\tau}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{1}{\rho},$$

ρ et τ désignant respectivement le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe (Γ) au point O.

Les équations (1) deviennent dès lors

$$(2) \qquad \frac{-ry + 1}{p} = \frac{rx - pz}{0} = \frac{py}{r} = \frac{V}{\omega}.$$

On peut les mettre sous la forme

$$(3) \qquad \frac{z}{x} = \frac{r}{p} = -\frac{\tau}{\rho},$$

$$(4) \qquad y = \frac{r}{p^2 + r^2} = \frac{\rho\tau^2}{\rho^2 + \tau^2}.$$

L'axe hélicoïdal instantané coupe donc, à angle droit, la nor-

([1]) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 9 et 10.

male principale Oy en un point distant de l'origine O de la longueur

$$l = \frac{\rho\tau^2}{\rho^2 + \tau^2}; \tag{5}$$

l'angle θ qu'il fait avec la tangente Ox est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{r}{p} = \frac{-\tau}{\rho}. \tag{6}$$

3. Supposons que la courbe (Γ) possède une torsion constante $\frac{1}{\tau_0}$ et cherchons l'équation, par rapport au trièdre mobile, de la surface lieu des axes hélicoïdaux instantanés relatifs aux différents points de la courbe.

On a, en vertu des équations (3) et (4),

$$\frac{z}{x} = -\frac{\tau_0}{\rho},$$

$$y = \frac{\rho\tau_0^2}{\rho^2 + \tau_0^2}.$$

Éliminant ρ entre ces deux équations, on trouve

$$y(z^2 + x^2) + \tau_0 xz = 0.$$

On reconnaît là le conoïde de Plücker. On a donc ce théorème :

Lors du déplacement du trièdre principal relatif à une courbe à torsion constante, l'axe hélicoïdal instantané décrit, par rapport à ce trièdre, un conoïde de Plücker.

4. Revenant au cas d'une courbe gauche quelconque, cherchons les expressions de la courbure et de la torsion en fonction de l et du rapport $\frac{V}{\omega}$ que, pour la simplicité, nous désignerons par k.

En éliminant ρ entre les égalités (5) et (6), on trouve

$$l = -\tau \sin\theta \cos\theta, \tag{7}$$

et, en éliminant τ,

$$l = \rho \sin^2\theta. \tag{8}$$

Exprimons maintenant θ en fonction des quantités l et k.

L'une des égalités (2) donne

$$\frac{pl}{r} = \frac{V}{\omega} = k,$$

ou

$$l = -\frac{k\tau}{\rho}. \tag{9}$$

Cette dernière égalité, jointe à (6), montre que

$$l = k \operatorname{tang}\theta.$$

On déduit de là

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta = 1 + \frac{k^2}{l^2}.$$

La formule (8) devient donc

$$\rho = \frac{l}{\sin^2\theta} = l + \frac{k^2}{l}. \tag{10}$$

Mais, en vertu de (9),

$$-\tau = \frac{\rho l}{k};$$

par suite, en tenant compte de (10),

$$-\tau = k + \frac{l^2}{k}. \tag{11}$$

On voit donc que *l'on peut déduire l'expression de* $-\tau$ *de celle de* ρ *en changeant* l *en* k *et* k *en* l.

SÉANCE DU 15 JUIN 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections : Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. le général Frolov, présenté par MM. Haton de la Goupillière et Vicaire; M. Gabriel Arnoux et M. Élie Perrin, présentés par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la détermination du point le plus probable défini sur une Carte par des recoupements non convergents.*

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur une transformation des formules de Codazzi et sur les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces à courbure moyenne constante.

1. Commençons par rappeler les formules de Codazzi :

$$(1)\quad \begin{cases} A q_1 + C p = 0, \\ C r + A'_v = 0, \\ A r_1 - C'_u = 0, \end{cases} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} &= q r_1 - r q_1, \\ \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} &= r p_1 - p r_1, \\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= p q_1 - q p_1. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Transformons-les maintenant en y introduisant la courbure moyenne h et la courbure totale g. On a, comme on sait,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2h = \frac{p_1}{C} - \frac{q}{A}, \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = g = \frac{p q_1 - q p_1}{AC}.$$

La première de ces formules et la première du groupe (1) sont vérifiées si l'on pose

$$\frac{p_1}{C} = \mu + h, \qquad \frac{q}{A} = \mu - h, \qquad -\frac{q_1}{C} = \frac{p}{A} = m,$$

quelles que soient les deux indéterminées μ et m. Portant ces valeurs de p, q, p_1, q_1 dans l'expression de g, nous trouvons

$$\mu^2 + m^2 = h^2 - g.$$

En dernier lieu, faisons

$$S^2 = h^2 - g, \qquad \mu = S \sin\tau, \qquad m = S\cos\tau;$$

nous avons ainsi exprimé p, q, p_1, q_1 au moyen de h, de l'angle auxiliaire τ et des coefficients de l'élément linéaire qui est supposé connu :

$$\begin{aligned} p_1 &= C(S\sin\tau + h), & -q_1 &= CS\cos\tau, \\ q &= A(S\sin\tau - h), & p &= AS\cos\tau. \end{aligned}$$

Substituons dans les deux premières équations du groupe (2), puis résolvons par rapport aux dérivées de τ; il viendra

$$(3)\qquad -\frac{\partial\tau}{\partial u}=\frac{A}{C}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\sin\tau}{S}+\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\cos\tau}{S}-\frac{A}{C}\frac{\partial}{\partial v}\log A^2S,$$

$$(4)\qquad -\frac{\partial\tau}{\partial v}=\frac{C}{A}\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\sin\tau}{S}-\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\cos\tau}{S}+\frac{C}{A}\frac{\partial}{\partial u}\log C^2S.$$

On voit par là que la courbure moyenne h satisfait à deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre. En effet, en égalant les deux expressions de τ''_{uv} et tenant compte des formules (3) et (4), on a pour τ une équation finie où figurent les dérivées secondes de h. En la différentiant par rapport à u et v, on forme deux équations qui, jointes à la précédente et aux équations (3) et (4), donneront, par l'élimination de τ, de τ'_u et de τ'_v, deux équations du troisième ordre pour la fonction h.

2. Le système (3) et (4) se prête à bien des applications. Nous n'insisterons que sur celles qui concernent les surfaces à courbure moyenne constante. Une pareille surface étant rapportée à une famille d'isothermes, nous ferons $A^2=C^2=\lambda$ avec $h=\text{const}$. Il vient alors simplement

$$\frac{\partial\tau}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial v}\log\lambda\sqrt{h^2-g},\qquad -\frac{\partial\tau}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\log\lambda\sqrt{h^2-g},$$

d'où résulte la condition d'intégrabilité

$$(5)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\lambda\sqrt{h^2-g}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\log\lambda\sqrt{h^2-g}=0.$$

Cette condition étant vérifiée, τ ne sera déterminé qu'à une constante près, ce qui démontre un théorème de M. O. Bonnet : *Étant donnée une surface à courbure moyenne constante, il en existe une infinité d'autres ayant même courbure moyenne qu'elle et applicables sur elle.*

3. L'équation (5) exprimant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface d'élément linéaire

$$ds^2=\lambda(du^2+dv^2)$$

soit applicable sur une surface à courbure moyenne constante h, il suffira d'y introduire exclusivement des paramètres différentiels invariants pour qu'elle soit valable dans tout système de coordonnées. Or cette équation peut s'écrire

$$\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\left(h^2-\frac{1}{R_1R_2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\log\left(h^2-\frac{1}{R_1R_2}\right)\right]+\frac{2}{\lambda}\left[\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial v^2}\right]=0,$$

ou, d'après la définition du paramètre Δ_2,

$$\Delta_2\log\left(h^2-\frac{1}{R_1R_2}\right)+2\Delta_2\log\lambda=0.$$

Il n'y a plus qu'à se rappeler la formule qui donne la courbure totale pour trouver

$$\Delta_2\log\left(h^2-\frac{1}{R_1R_2}\right)-\frac{4}{R_1R_2}=0.$$

Telle est, exprimée au moyen d'invariants seulement, la condition *nécessaire et suffisante* pour qu'un élément linéaire, *donné sous une forme quelconque*, convienne à des surfaces à courbure moyenne constante h (à des surfaces minima si h est nul).

Il en résulte que cet élément est réductible à la forme

$$ds^2=\left(h^2-\frac{1}{R_1R_2}\right)^{-\frac{1}{2}}(du^2+dv^2).$$

Remarque. — L'angle τ est le double de l'angle que fait l'une des lignes de courbure avec l'une des lignes coordonnées.