BULLETIN DE LA S. M. F.

BLUTEL

Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation entière

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 92-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__92_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation entière; par M. BLUTEL.

THÉORÈME I. — *Toute fonction entière $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ des racines d'une équation*

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$

à coefficients quelconques, peut se mettre sous forme d'une fonction entière par rapport aux coefficients de cette équation, *et par rapport à $m-1$ racines $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, cette nouvelle fonction étant de degré p par rapport à x_{m-p}. Cette transformation n'est possible que d'une seule façon.*

Démontrons d'abord la première partie du théorème pour une fonction entière $f(x_1, x_2)$ des racines d'une équation du second degré

$$x^2 + p_1 x + p_2 = 0.$$

Si l'on tient compte de la relation $x_1 + x_2 + p_1 = 0$, on obtient

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, -p_1 - x_1).$$

Cette dernière fonction, où l'on remplacerait x_1^2 autant de fois que possible par $-(p_1 x_1 + p_2)$, prendrait finalement la forme $a + x_1 b$, où a et b sont des fonctions entières de p_1 et p_2.

Supposons donc la propriété démontrée pour une équation de degré $m-1$ et cherchons à l'étendre à une équation de degré m. Soit une fonction entière $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ des racines d'une équation entière

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0.$$

On peut la regarder simplement comme une fonction entière de $x_2, x_3, \ldots, x_m$ qui sont les racines de l'équation

$$\begin{aligned} x^{m-1} + (x_1 + p_1) x^{m-2} + (x_1^2 + p_1 x_1 + p_2) x^{m-3} + \ldots \\ + x_1^{m-1} + p_1 x_1^{m-2} + \ldots + p_{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Comme telle, elle se mettra sous forme d'une fonction entière des coefficients de cette équation et, par suite, de $x_1, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$, fonction entière aussi par rapport à $x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}$ et de degré $m-2$ par rapport à x_2, de degré $m-3$ par rapport à x_3, etc.

Soit

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1})$$

cette nouvelle fonction ; en tenant compte de la relation

$$x_1^m + p_1 x_1^{m-1} + \ldots + p_m = 0,$$

on la ramènera à ne contenir x_1 qu'au degré $m-1$, et l'on aura alors la forme énoncée. Nous verrons plus loin que cette forme ne peut s'obtenir que d'une seule façon.

Il résulte immédiatement de là que toute fonction rationnelle

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{F(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m)}{F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m)},$$

où les fonctions f_1 et F_1 possèdent les propriétés énoncées dans le théorème précédent.

Théorème II. — *Si la fonction rationnelle*

$$R = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{F(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

est une fonction symétrique, les deux polynômes f_1 et F_1 de la remarque précédente regardés comme fonctions entières de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, dont les coefficients sont des polynômes par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_m$, ont leurs coefficients proportionnels et la valeur de la fonction symétrique est égale au rapport de deux coefficients correspondants.

Dans le cas de deux racines, on a

$$R = \frac{f(x_1, x_2)}{F(x_1, x_2)} = \frac{a(p_1, p_2) + x_1 b(p_1, p_2)}{A(p_1, p_2) + x_1 B(p_1, p_2)}.$$

Cette fonction rationnelle du premier degré par rapport à x_1 conserve la même valeur si l'on remplace x_1 par x_2, à cause de la symétrie de R; cet échange n'altère d'ailleurs pas les valeurs de p_1 et p_2 ni, par suite, les coefficients a, b, A, B.

On en conclut qu'elle est indépendante de x_1 et, par suite, que

$$\frac{a(p_1, p_2)}{A(p_1, p_2)} = \frac{b(p_1, p_2)}{B(p_1, p_2)} = R.$$

Dans le cas général, on a

$$\begin{aligned} R &= \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{F(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \frac{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})}{F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})} \\ &= \frac{a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}) + x_{m-1} b(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})}{A(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}) + x_{m-1} B(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})}, \end{aligned}$$

a, b, A, B étant aussi des fonctions entières de $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Puisque R est une fonction symétrique, elle ne change pas si l'on y remplace x_{m-1} par x_m, échange qui ne modifie pas p_1, $p_2, \ldots, p_m$ ni, par suite, les fonctions a, b, A, B. On en conclut, comme plus haut, que l'on a

$$R = \frac{a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})}{A(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})} = \frac{b(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})}{B(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})}.$$

Chacun de ces nouveaux rapports est de la forme

$$\frac{u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}) + x_{m-2}v(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}) + x_{m-2}^2 w(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3})}{U(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}) + x_{m-2}V(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}) + x_{m-2}^2 W(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3})}.$$

Leur valeur ne change pas, si l'on y remplace x_{m-2} successivement par x_{m-1} et par x_m, à cause de la symétrie de R; comme ils sont du second degré seulement par rapport à x_{m-2}, on en conclut qu'ils n'en dépendent pas, c'est-à-dire que l'on a

$$R = \frac{u}{U} = \frac{v}{V} = \frac{w}{W}$$

et trois autres égalités semblables.

La même démonstration peut évidemment se répéter de proche en proche, et l'on aura finalement pour R une suite de rapports dont les termes ne dépendent plus, en dehors de $p_1, p_2, \ldots, p_m$, que de la seule racine x_1 qu'ils renferment au degré $m - 1$; comme ils conservent la même valeur lorsqu'on y remplace x_1 successivement par les $m - 1$ autres racines, on conclut qu'ils ne renferment pas x_1, ce qui démontre le théorème.

Conséquences. — 1° Toute fonction rationnelle symétrique peut se mettre sous la forme

$$\frac{\omega(p_1, p_2, \ldots, p_m)}{\Omega(p_1, p_2, \ldots, p_m)},$$

ω et Ω désignant deux polynômes; elle peut donc être regardée comme un quotient de deux polynômes symétriques par rapport aux racines $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

2° On peut remarquer aussi que si une fonction entière

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

est symétrique et si on la met sous la *forme réduite* indiquée dans le théorème I, elle se réduira à son terme indépendant de x_1, $x_2, \ldots, x_{m-1}$. En effet, on peut la regarder comme une fonction rationnelle symétrique dont le dénominateur est 1; appliquant le théorème II, on voit que les coefficients des divers termes renfermant $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ au numérateur de la forme réduite sont tous nuls.

On déduit de là un perfectionnement important à la méthode de Cauchy pour le calcul des fonctions symétriques entières.

On commencera par faire disparaître dans la fonction symétrique une racine quelconque x_m par exemple, puis on ramènera la fonction à ne plus contenir une autre racine x_{m-1} qu'au premier degré; ce résultat obtenu, on négligera tous les termes renfermant x_{m-1}. On ramènera la fonction restante à ne plus contenir une nouvelle racine x_{m-2} qu'au second degré, puis on négligera tous les termes renfermant encore x_{m-2}, etc.

3° La réduction d'une fonction entière quelconque

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

n'est possible que d'une seule façon.

Si l'on avait en effet de deux façons différentes

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m),$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f'_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

on aurait

$$R = 1 = \frac{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m)}{f'_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m)}.$$

L'application du théorème II à cette fonction symétrique montre qu'il y a bien égalité entre les coefficients des deux fonctions f_1 et f'_1 regardées comme polynômes par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$.