

BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Expression de quelques aires sur le paraboloïde elliptique

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 13-16

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__13_1

© Bulletin de la S. M. F., 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Expression de quelques aires sur le parabolöide elliptique;
par M. G. HUMBERT.

Dans un Mémoire inséré aux tomes V et VI du *Journal de Mathématiques* (4^e série), j'ai donné une formule simple permettant d'exprimer, à l'aide des fonctions elliptiques, l'aire d'une calotte ellipsoïdale, limitée par une conique le long de laquelle le cône circonscrit à l'ellipsoïde est de révolution. La même méthode s'applique à l'évaluation d'une aire analogue sur le parabolöide elliptique, mais le résultat est beaucoup plus simple, puisqu'on arrive, pour l'aire cherchée, à une expression algébrique et même rationnelle.

Voici la marche des calculs, qui sont tout à fait élémentaires.

Soit le parabolöide elliptique

$$(1) \quad \frac{Y^2}{p} + \frac{Z^2}{q} + 2X = 0;$$

on suppose $p > 0$, $q > 0$ et $p > q$.

Le lieu des sommets des cônes de révolution *réels* circonscrits à la surface (1) est *une* des paraboles focales, ou plutôt la partie de la parabole extérieure à la surface; les équations de cette focale sont

$$(2) \quad y = 0, \quad z^2 - 2x(p - q) = p(p - q).$$

Le plan polaire P d'un point (x, z) de la courbe (2), par rap-

port au parabolôide, a pour équation

$$(3) \quad X + Z \frac{z}{q} + x = 0;$$

proposons-nous d'évaluer l'aire de la zone comprise, sur le parabolôide, entre ce plan P et le plan polaire P' d'un point

$$(x + dx, z + dz)$$

infinitement voisin de (x, z) , sur la parabole focale (2).

A cet effet, projetons la zone sur un plan normal à l'axe du cône de révolution de sommet (x, z) , circonscrit au parabolôide : il est clair que l'aire de la projection est égale à la différence des aires des projections, sur le même plan, des sections faites dans le parabolôide par les plans P et P'. Or, en appelant $d\sigma$ l'aire de la zone, et θ l'angle que les plans tangents au parabolôide le long de la section P font avec l'axe du cône, on a, pour la zone projetée, la valeur $d\sigma \sin \theta$, et, en désignant par ω et $\omega + d\omega$ les aires des sections P et P', par λ et λ' les angles des plans P et P' avec l'axe du cône, il viendra

$$(4) \quad d\sigma \sin \theta = (\omega + d\omega) \sin \lambda' - \omega \sin \lambda.$$

L'axe du cône est la tangente en (x, z) à la parabole focale (2); ses équations sont donc

$$(5) \quad Y = 0, \quad X(p - q) - Zz + (p - q)(x + p) = 0$$

et, par suite,

$$\sin \lambda = \frac{pz}{\sqrt{(z^2 + q^2)[z^2 + (p - q)^2]}},$$

$$\sin \lambda' = \frac{pz + (p - q) dz}{\sqrt{[(z + dz)^2 + q^2][z^2 + (p - q)^2]}}.$$

Si l'on développe $\sin \lambda'$ suivant les puissances croissantes de dz , il vient, en négligeant les termes en dz^2 ,

$$\sin \lambda' = \sin \lambda + dz q \frac{q(p - q) - z^2}{(z^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} [z^2 + (p - q)^2]^{\frac{1}{2}}};$$

$\sin \theta$ se calcule aisément; on trouve

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{p(p - q)}}{\sqrt{z^2 + (p - q)^2}}.$$

Enfin ω , aire de la section faite dans le paraboloidé (1) par le plan (3), a pour expression

$$\omega = \pi \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{(z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}{p - q} [z^2 - q(p - q)].$$

On aura $\omega + d\omega$ en changeant, dans cette expression, z en $z + dz$. Portons maintenant dans (4) les valeurs de $\sin\theta$, $\sin\lambda$, $\sin\lambda'$, ω et $\omega + d\omega$; il vient, en divisant tout par $[z^2 + (p - q)^2]^{\frac{1}{2}}$,

$$d\sigma \sqrt{p(p - q)} \frac{p - q}{\pi \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{q}{(z^2 + q^2)} [z^2 - q(p - q)]^2 dz \\ + \frac{pz}{(z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{z dz}{(z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} [z^2 - q(p - q)] \right. \\ \left. + (z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2z dz \right\},$$

ou, en réduisant,

$$d\sigma \frac{(p - q)^{\frac{3}{2}}}{\pi p} q^{\frac{3}{2}} = \frac{z^2 - q(p - q)}{(z^2 + q^2)} [z^2(p - q) + q^2(p - q)] dz + 2pz^2 dz,$$

c'est-à-dire

$$d\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}(p - q)^{\frac{3}{2}}} [(3p - q)z^2 - q(p - q)^2] dz.$$

On a ainsi l'expression de $\frac{d\sigma}{dz}$ en fonction *entière* de z ; on en déduit l'aire σ de la calotte de paraboloidé qui a pour base le plan P :

$$\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}(p - q)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{3p - q}{3} z^3 - q(p - q)^2 z \right] + \text{const.}$$

La constante se détermine en écrivant que σ est nul lorsque le plan P touche le paraboloidé, c'est-à-dire lorsque le pôle (x, z) de ce plan est un des ombilics du paraboloidé. Or les deux ombilics réels sont à l'intersection de la surface avec la focale (2); on trouve ainsi, pour le z de l'ombilic situé au-dessus du plan des xy ,

$$z = \sqrt{q(p - q)};$$

et, par suite, on a, pour l'aire cherchée,

$$(6) \quad \sigma = \frac{\pi p}{p^{\frac{3}{2}}(p-q)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{3p-q}{3} z^3 - q(p-q)^2 z \right] - \frac{2}{3} \pi p q.$$

On peut donc énoncer le résultat suivant, qui résume cette Note :

Soit un cône de révolution circonscrit au paraboloïde elliptique

$$\frac{Y^2}{p} + \frac{Z^2}{q} + 2X = 0 \quad (p > 0, \quad q > 0, \quad p > q);$$

son sommet est dans le plan $Y = 0$; désignons par x et z ses deux autres coordonnées, et supposons, par exemple, z positif. L'aire σ de la calotte de paraboloïde, qui a pour base le plan polaire du sommet du cône, est une fonction entière, du troisième ordre, de z , et elle est donnée par la formule (6).

Vérification. — Si le paraboloïde est de révolution, on a $p = q$ et z est toujours nul; l'aire σ se présente alors sous forme indéterminée. Mais, si l'on remplace z par sa valeur en fonction de x , tirée de (2), on trouve pour σ , dans le cas général,

$$\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{3p-q}{3} (p+2x)^{\frac{3}{2}} - q(p-q)(p+2x)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{2}{3} \pi p q,$$

et si l'on fait $p = q$, il vient

$$\sigma = \frac{2}{3} \pi \sqrt{p} \left[(p+2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right],$$

formule qui se vérifie sans difficulté, en cherchant l'aire engendrée par la révolution, autour de son axe, de la portion de la parabole

$$Y^2 + 2pX = 0,$$

qui est comprise entre le sommet et la droite polaire du point $(x, 0)$.