BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GUYOU

Sur les équations du clapotis

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 140-144
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__140_1>

Sur les équations du clapotis; par M. E. Guyou.

Le seul mouvement oscillatoire des liquides dont on connaisse exactement les lois est celui de la *houle* dans des eaux de profondeur infinie. Je me propose de montrer que l'on peut exprimer également celles du mouvement connu sous le nom de *clapotis.*

M. Boussinesq a étudié ce phénomène dans le cas où la hauteur des ondes est petite relativement à leur longueur, et a donné des équations qui satisfont à une grande approximation à la condition de continuité et à celle de la surface libre.

Dans le mouvement exprimé par ces équations, de même que dans la houle, les molécules appartênant à une même couche horizontale d'équilibre sont réparties à chaque instant sur le contour d'une trochoïde d'autant plus aplatie que la couche est plus profonde, et celles qui appartiennent à une même ligne verticale sont situées à l'extrémité de rayons parallèles des cercles générateurs.

Dans la houle, chaque molécule décrit son cercle d'un mouvement uniforme, de sorte que les ondes trochoïdales conservent la même forme et se transportent avec une vitesse constante.

Dans le clapotis, le rayon sur lequel se trouve chaque molécule reste parallèle à lui-même, et la molécule est animée sur sa direction d'un mouvement pendulaire. Il en résulte que, dans une demi-période, les couches de même profondeur prennent la forme de trochoïdes de plus en plus aplaties jusqu'à la forme rectiligne, et, dans la demi-période suivante, les trochoïdes se renversent, présentant leurs crêtes aux points où se trouvaient précédemment les creux et réciproquement. Chacune d'elles subit ainsi des déformations périodiques offrant une grande analogie avec celles des cordes vibrantes.

Les rayons sur lesquels oscillent les molécules ne restent pas immobiles. Il faut, en effet, que chaque trochoïde limite au-dessous d'elle un volume constant, et, par suite, que le centre du cercle générateur reste situé au-dessus de la couche de repos à une hauteur égale au quotient de la surface du cercle par la longueur de l'onde, c'est-à-dire à une hauteur proportionnelle au carré du rayon. Il résulte de là que, par rapport à des axes ayant pour origine la position de repos, et dirigés l'un verticalement et l'autre parallèlement au rayon de la molécule considérée, l'abscisse, c'est-à-dire le rayon, est proportionnelle à la racine carrée de l'ordonnée : la trajectoire est donc une parabole dont l'axe est vertical.

Ces résultats sont conformes à ceux qu'a obtenus M. Marey, par sa méthode chronophotographique, dans les expériences remarquables signalées à l'Académie le 1er mai 1893.

L'accord entre les résultats de M. Boussinesq et ceux de l'expérience est si frappant qu'il était vraisemblable qu'une très petite modification aux lois données suffirait pour les amener à satisfaire rigoureusement aux conditions du problème. On y arrive, en effet, en substituant une fonction elliptique à la fonction circulaire qui exprime le mouvement oscillatoire des molécules sur leurs rayons respectifs. Traduit géométriquement, le mouvement rectiligne, au lieu d'être celui de la projection d'un point qui décrit un cercle uniformément, est celui d'un point qui décrit le contour d'une ellipse avec une vitesse linéaire constante.

Si l'on désigne par X et Y les coordonnées horizontale et verticale de la position de repos d'une molécule, et par x et y celles de la position *à un instant donné,* dans le phénomène de la *houle,* on a les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} x = X + r\sin\frac{2\pi}{L}X, \\ y = Y + r\cos\frac{2\pi}{L}X - \frac{\pi r^2}{L}. \end{cases}$$

L représente la longueur des ondes, r le rayon orbitaire correspondant à la profondeur Y; celle-ci est mesurée à partir de la surface libre de repos. Enfin la valeur de r dépend du rayon R correspondant à la surface libre; la loi de cette dépendance s'exprime au moyen d'une variable auxiliaire z par les deux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} r = Re^{-\frac{2\pi}{L}z}, \\ z = Y + \frac{\pi R^2}{L} - \frac{\pi r^2}{L}, \end{cases}$$

où z représente la distance du centre orbitaire de la molécule considérée au centre orbitaire de la molécule superficielle appartenant à la même ligne verticale.

Il est facile de s'assurer que, dans la déformation résultant du passage des molécules des positions X, Y aux positions x, y, les éléments correspondants conservent la même surface, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{dx}{dX}\frac{dy}{dY} - \frac{dx}{dY}\frac{dy}{dX} = 1,$$

et cela quelle que soit la valeur de R.

Par suite, on peut, dans le système d'équations (1) et (2), supposer que R est une fonction périodique arbitraire du temps sans que cette propriété cesse de subsister, et l'on aura ainsi un mouvement oscillatoire dans lequel la condition de continuité sera sans cesse vérifiée. Il ne reste donc plus qu'à choisir cette fonction telle que la surface libre reste surface de niveau, c'est-à-dire telle que la résultante de la pesanteur et de la force d'inertie des molécules superficielles soit normale à la surface libre.

Cette condition est exprimée par l'équation

$$\frac{dx}{dX}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dX}\left(g - \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,$$

les dérivées partielles étant prises pour la surface libre.

Or le mouvement des molécules superficielles est exprimé par les équations

$$x = X + R\sin\frac{2\pi}{L}X,$$

$$y = R\cos\frac{2\pi}{L}X - \frac{\pi R^2}{L},$$

dans lesquelles R est seul fonction du temps.

On obtient en effectuant les calculs

$$\frac{d^2R}{dt^2} + g\frac{2\pi R}{L} + \frac{4\pi^2}{L^2}\left(R\frac{dR^2}{dt^2} + R^2\frac{d^2R}{dt^2}\right) = 0.$$

En multipliant par $2\frac{dR}{dt}$, on obtient par une première intégration

$$\frac{dR^2}{dt^2} + \frac{2\pi g}{L}R^2 + \frac{4\pi^2}{L^2}R^2\frac{dR^2}{dt^2} = \text{const.}$$

Si l'on désigne par a la valeur maxima de R dans le mouvement, on doit avoir $R = a$ pour $\frac{dR}{dt} = 0$; par suite, la constante est

$$\frac{2\pi g a^2}{L},$$

et il vient

$$\frac{dR^2}{dt^2} + \frac{2\pi g}{L}(R^2 - a^2) + \frac{4\pi^2}{L^2}R^2\frac{dR^2}{dt^2} = 0.$$

En posant

(3) $$R = a\cos\varphi$$

et substituant, on trouve finalement

$$(4) \qquad d\varphi\sqrt{1+\frac{4\pi^2 a^2}{L^2}\cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{2\pi g}{L}}\,dt.$$

Par suite, les équations (1), (2), (3), (4) définissent un mouvement qui satisfait aux conditions cinématiques et dynamiques du problème.

En désignant par ρ le rayon du cercle dont le développement est égal à L, l'équation (4) devient

$$(5) \qquad d\varphi\sqrt{1+\frac{a^2}{\rho^2}\cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\,dt.$$

Considérons actuellement a comme le petit axe d'une ellipse ayant pour grand axe

$$a\sqrt{1+\frac{a^2}{\rho^2}}.$$

Les coordonnées d'un point de cette ellipse peuvent être exprimées par

$$a\cos\varphi, \quad a\sqrt{1+\frac{a^2}{\rho^2}}\sin\varphi;$$

le petit arc d'ellipse correspondant à $d\varphi$ a pour valeur

$$\begin{aligned} ds &= a\sqrt{\sin^2\varphi + \left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)\cos^2\varphi}\,d\varphi \\ &= a\sqrt{1+\frac{a^2}{\rho^2}\cos^2\varphi}\,d\varphi. \end{aligned}$$

On a donc, d'après l'équation (5),

$$ds = a\sqrt{\frac{g}{\rho}}\,dt.$$

Par suite, le mouvement oscillatoire est celui de la projection sur le petit axe d'un point décrivant, avec une vitesse linéaire constante, le contour de cette ellipse.