BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Expression de quelques nouvelles aires sur le paraboloïde elliptique

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 17-19
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__17_0>

Expression de quelques nouvelles aires sur le paraboloïde elliptique; par M. G. Humbert.

Une formule que j'ai fait connaître ailleurs ([1]) permet d'exprimer, à l'aide des fonctions elliptiques, l'aire comprise sur un ellipsoïde entre les deux boucles de la courbe de contact de la développable circonscrite à l'ellipsoïde et à une sphère, le centre de la sphère étant supposé sur un des axes de la quadrique.

En essayant d'appliquer cette formule au paraboloïde elliptique, j'ai reconnu que les fonctions elliptiques disparaissent et qu'on arrive à une expression rationnelle remarquablement simple; c'est cette expression qui va être donnée ici.

Voici la formule pour le cas de l'ellipsoïde :

Soit une sphère, de rayon R, *dont le centre est situé à une distance l du centre d'un ellipsoïde, sur l'axe de longueur $2a$; l'aire ellipsoïdale, s définie plus haut, a pour valeur*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} s = {} & 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u) - 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(pu - 1)\frac{\sigma_1 u\,\sigma u}{\sigma_2 u\,\sigma_3 u} \\ & - 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{\sigma_1 u\,\sigma u}{\sigma_2 u\,\sigma_3 u}\right)^3 [3e_1 pu + e_1^2 + 2e_2 e_3]. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, les fonctions elliptiques dépendent des quantités e_1, e_2, e_3 ainsi définies

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} & e_1 = 1 - 3\frac{b^2c^2}{\rho}; \qquad e^2 = 1 - 3\frac{a^2c^2}{\rho}; \qquad e_3 = 1 - 3\frac{a^2b^2}{\rho}; \\ & \rho = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2. \end{aligned}\right.$$

a, b, c sont les demi-axes de l'ellipsoïde; enfin u est le plus petit argument réel et positif déterminé par la relation

$$(3)\qquad 3\,\frac{l^2 - R^2}{R^2}\,\frac{b^2c^2}{\rho} = pu - 1.$$

On doit, pour appliquer la formule, supposer que la sphère est extérieure à l'ellipsoïde, c'est-à-dire $l > a$ et $R < l - a$.

Pour passer au cas du paraboloïde, on doit remplacer dans ces formules l par $l_0 + a$, b^2 par ap, c^2 par aq et faire tendre a vers

([1]) *Journal de Mathématiques*, t. VI (4e série), p. 288.

l'infini ; l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ a pour limite le paraboloïde elliptique

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}+2x=0.$$

La formule (3) s'écrit

$$3\,\frac{a^2+2al_0+l_0^2-R^2}{a(p+q)+pq}\,\frac{pq}{R^2}=pu-1$$

et, par suite, u tend vers zéro lorsque a tend vers l'infini. On tire de là le développement de a en fonction de u sous la forme

$$a=\frac{\alpha}{u^2}+\beta+\gamma u^2+\ldots;$$

si l'on porte cette valeur dans les relations (2), on obtient des développements analogues pour e_1, e_2, e_3 et ρ ; si enfin on remplace dans l'équation (1) les quantités a, e_1, e_2, e_3, ρ par ces développements, et si l'on développe les fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de u, on arrive à une expression de la forme

$$s=A+Bu+\ldots,$$

qui, pour $u=0$, se réduit à $s=A$. Il est inutile d'entrer dans le détail des calculs, qui n'offrent aucune difficulté ; la formule finale est la suivante

$$(4)\quad s=2\pi\,\frac{R}{p^{\frac{3}{2}}q^{\frac{3}{2}}}\left[2p^2q^2+2l_0pq(p+q)+\frac{R^2}{3}(3p^2+3q^2+2pq)\right].$$

Ainsi :

L'aire s comprise sur le paraboloïde elliptique

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}+2x=0$$

entre les deux boucles de la courbe de contact de la développable circonscrite au paraboloïde et à une sphère de rayon R, *ayant son centre sur l'axe du paraboloïde à une distance l_0 du sommet, est exprimée, en fonction rationnelle de* R *et de l_0, par la formule* (4).

On doit supposer la sphère extérieure au paraboloïde, c'est-à-dire $l_0>0$ et $R<l_0$.

Vérification. — Si le paraboloïde est de révolution, l'aire s est comprise entre deux parallèles et peut se calculer directement.

Considérons la parabole

$$y^2 + 2px = 0$$

et le cercle

$$(x - l_0)^2 + y^2 = R^2;$$

les tangentes communes à ces deux courbes touchent la parabole aux points dont les abscisses vérifient l'équation

$$(5) \qquad px^2 + 2x(pl_0 + R^2) + p(l_0^2 - R^2) = 0.$$

Soient, par ordre de grandeur croissante, x_1 et x_2 les deux racines de cette équation; sur le paraboloïde engendré par la rotation de la parabole autour de Ox, l'aire comprise entre les deux parallèles $x = x_1$ et $x = x_2$ a pour expression

$$s = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{p^2 - 2px},$$

c'est-à-dire

$$s = \frac{2\pi}{3p}\left[(p^2 - 2px_1)^{\frac{3}{2}} - (p^2 - 2px_2)^{\frac{3}{2}}\right];$$

chacun des radicaux du second membre devant être pris positivement. Or la relation (5) donne

$$(6) \qquad p^2(x + l_0)^2 = R^2(p^2 - 2px);$$

d'ailleurs on vérifie que $-l_0$ est compris entre x_1 et x_2 et, par suite, on aura, en tenant compte de (6),

$$s = \frac{2\pi}{3p}\left[-\frac{p^3}{R^3}(x_1 + l_0)^3 - \frac{p^3}{R^3}(x_2 + l_0)^3\right].$$

Ainsi s est une fonction symétrique entière de x_1 et x_2; le calcul se fait immédiatement et donne

$$s = \frac{2\pi p^2}{3R^3}(-12l_0pR^4 - 6R^4p^2 - 8R^6)\frac{1}{p^3},$$

c'est-à-dire

$$s = \frac{2\pi R}{p}\left[2p^2 + 4l_0p + \frac{8}{3}R^3\right],$$

formule qui coïncide avec la formule (4) où l'on a fait $p = q$. On a ainsi vérifié la relation (4) et, par contre-coup, l'équation (1).