R. GODEFROY

Sur les courbes de Lamé

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 20-25
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__20_0>

Sur les courbes de Lamé; par M. R. Godefroy.

Cette Note est relative aux rayons de courbure des courbes de Lamé et de leurs développées. J'ai déjà traité ce sujet [*Sur les rayons de courbure de certaines courbes et surfaces, etc.* (*Journal de l'École Polytechnique,* LXIIe Cahier)]; mais je ne crois pas inutile d'y revenir, ces problèmes pouvant être résolus différemment, d'une manière un peu plus simple, et le résultat lui-même, dans le cas des développées, étant susceptible d'être présenté sous une forme nouvelle.

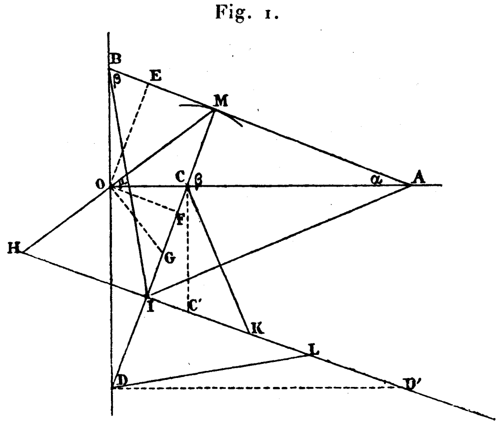
Rayon de courbure des courbes de Lamé. — Dans le Mémoire auquel il est fait allusion ci-dessus, le rayon de courbure des courbes de Lamé se déduit de l'expression du rayon de courbure de courbes plus générales : dans le cas spécial qui nous occupe, le procédé suivant conduit plus rapidement au résultat.

Prenons l'équation des courbes de Lamé (axes rectangulaires) sous la forme suivante

$$ax^m + by^m + c = 0.$$

Soit $M(x, y)$ le point de la courbe (*fig.* 1) pour lequel on

Fig. 1.



cherche l'expression du rayon de courbure $MI = R$. Il est inutile d'insister sur les notations et éléments divers dont on fera usage, tout étant suffisamment indiqué sur la figure.

On a

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{b}{a}\cdot\frac{y^{m-1}}{x^{m-1}},$$

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{y}{x},$$

par suite

(1) $$\operatorname{tang}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{tang}^{m-1}\mu.$$

C'est cette relation entre les coefficients angulaires de la normale et du rayon OM qui est notre point de départ.

Différentiant (1), on obtient

(2) $$\frac{d\beta}{\cos^2\beta} = (m-1)\frac{b}{a}\operatorname{tang}^{m-2}\mu\,\frac{d\mu}{\cos^2\mu};$$

mais

$$\frac{b}{a}\operatorname{tang}^{m-2}\mu = \frac{\frac{b}{a}\operatorname{tang}^{m-1}\mu}{\operatorname{tang}\mu} = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\mu}.$$

Cette valeur permet d'écrire (2) sous la forme

$$\frac{d\beta}{\sin\beta\cos\beta} = (m-1)\frac{d\mu}{\sin\mu\cos\mu}$$

ou

(3) $$\frac{d\mu}{d\beta} = \frac{1}{m-1}\,\frac{\sin\mu\cos\mu}{\sin\beta\cos\beta}.$$

La perpendiculaire à OM au point O rencontrant la normale en G, on aura

$$\frac{d\mu}{d\beta} = \frac{R}{MG}.$$

On a de plus, dans les triangles OMA, OMB,

$$\frac{\sin\mu}{\cos\beta} = \frac{MA}{MO}, \qquad \frac{\cos\mu}{\sin\beta} = \frac{MB}{MO}.$$

Ces valeurs étant portées dans (3), cette expression devient

(4) $$R = \frac{1}{m-1}\,\frac{MA.MB.MG}{MO^2};$$

mais

$$\frac{OE}{MO} = \frac{MO}{MG}$$

ou

$$MO^2 = MG.OE.$$

Portant dans (4) cette valeur de MO^2, on a l'expression suivante du rayon de courbure

$$R = \frac{1}{m-1}\,\frac{MA.MB}{OE}, \tag{5}$$

forme obtenue par M. Fouret (*Comptes rendus,* 21 avril 1890).

Rayon de courbure des développées des courbes de Lamé. — Ce problème est traité dans le Mémoire déjà cité, en partant directement de la formule qui précède. Ici nous commencerons par la mettre sous une forme un peu différente.

On a

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

ou

$$MA.MB = MC.MD,$$

ce qui permet d'écrire (5) de la manière suivante

$$MI = \frac{1}{m-1}\,\frac{MC.MD}{OE}.$$

C'est de cette expression que nous allons partir.

Soit $d\theta$ l'angle de contingence en M, on aura

$$\frac{\frac{dMI}{d\theta}}{MI} = \frac{\frac{dMC}{d\theta}}{MC} + \frac{\frac{dMD}{d\theta}}{MD} + \frac{\frac{dMF}{d\theta}}{MF}. \tag{6}$$

Les signes du deuxième membre sont ici ceux qui conviennent dans l'un des cas possibles de la figure. Il est bien entendu qu'il est indispensable, dans tous les cas, de prendre, avec des signes contraires, les segments croissant et décroissant (il est toujours aisé de les distinguer d'après la position des points où les normales menées à leurs extrémités rencontrent la normale à leur enveloppe).

Ceci posé, appelons R′ le rayon de courbure de la développée au point I, et C′, D′, H, K, L les points où les perpendiculaires aux axes en C et D, la droite OM, et les perpendiculaires menées de C et D à IA et IB rencontrent la normale en I à la développée.

On a

$$\frac{dMI}{d\theta} = R'$$

et aussi

$$\frac{dMC}{d\theta} = IC', \qquad \frac{dMD}{d\theta} = ID', \qquad \frac{dMF}{d\theta} = OF.$$

Ces valeurs étant portées dans (6), la formule devient

$$\frac{R'}{MI} = \frac{IC'}{MC} + \frac{ID'}{MD} + \frac{OF}{MF}; \tag{7}$$

mais

$$\frac{IC'}{MC} = \frac{IC}{MA} = \frac{IK}{MI},$$
$$\frac{ID'}{MD} = \frac{ID}{MB} = \frac{IL}{MI},$$
$$\frac{OF}{MF} = \frac{IH}{MI}.$$

Portant ces expressions dans (7), on obtient

$$\frac{R'}{MI} = \frac{IK + IL + IH}{MI}$$

ou

$$R' = IK + IL + IH,$$

formule qui n'est vraie, dans tous les cas, que si l'on tient compte des prescriptions énoncées ci-dessus relativement aux signes des segments. Il serait plus juste d'écrire, en général, et à condition d'entendre comme il convient les doubles signes,

$$R' = \pm IK \pm IL \mp IH.$$

Cas particulier. — *Rayon de courbure de la développée de l'ellipse.* — Il est intéressant de déduire de ce qui précède l'expression du rayon de courbure de la développée de l'ellipse. Supposons menées de C et D les perpendiculaires à MI, qui rencontrent OM respectivement en N et P.

On sait, par une construction bien connue du centre de courbure de l'ellipse, que

$$CN = IC';$$

de même

$$DP = ID';$$

par suite

$$\frac{IC'}{MC} = \frac{CN}{MC} = \frac{IH}{MI},$$
$$\frac{ID'}{MD} = \frac{DP}{MD} = \frac{IH}{MI}.$$

On a, du reste,

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{MF}} = \frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{MI}};$$

la formule (7) devient alors

$$\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{MI}} = \frac{3\,\mathrm{IH}}{\mathrm{MI}}$$

ou simplement

$$\mathrm{R}' = 3\,\mathrm{IH}.$$

C'est la formule de Maclaurin.

Rayon de courbure de la développée de la développée de l'ellipse. — On sait (*loc. cit.*) comment on pourrait arriver à l'expression du rayon de courbure des développées des développées des courbes de Lamé. Cette recherche ne paraît pas devoir conduire, en général, à des résultats d'une interprétation commode. Le cas particulier de l'ellipse donne pourtant lieu à une construction extrêmement simple. C'est ce que nous allons montrer (1).

On a

$$\mathrm{R}' = 3\,\mathrm{IH};$$

mais

$$\frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{OF}} = \frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{MF}} = \frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{OE}};$$

par suite

$$\mathrm{R}' = \frac{3\,\mathrm{OF.MI}}{\mathrm{OE}}.$$

On déduit de là

$$(8)\qquad \frac{\frac{d\mathrm{R}'}{d\theta}}{\mathrm{R}'} = \frac{\frac{d\mathrm{OE}}{d\theta}}{\mathrm{OE}} + \frac{\frac{d\mathrm{MI}}{d\theta}}{\mathrm{MI}} \mp \frac{\frac{d\mathrm{OF}}{d\theta}}{\mathrm{OF}}.$$

Le signe — convient au cas où le point F se trouve entre les points M et I, le signe + au cas contraire.

Soit R″ le rayon de courbure de la deuxième développée, on a

$$\frac{d\mathrm{R}'}{d\theta} = \mathrm{R}'',$$

$$\frac{d\,\mathrm{OE}}{d\theta} = \mathrm{OF},\qquad \frac{d\,\mathrm{MI}}{d\theta} = \mathrm{R}',\qquad \frac{d\,\mathrm{OF}}{d\theta} = \mathrm{FI}.$$

(1) Le lecteur est prié de refaire la figure, dans le cas de l'ellipse, en ne traçant, outre les axes, la tangente et les normales à l'ellipse et à sa développée, que les droites OM, OE, OF.

La formule (8) peut alors s'écrire

$$\frac{R''}{R'} = \frac{OF}{OE} + \frac{R'}{MI} \mp \frac{FI}{OF}. \tag{9}$$

Or on a

$$\frac{R''}{R'} = \frac{R''}{3IH},$$

$$\frac{OF}{OE} = \frac{OF}{FM} = \frac{IH}{MI},$$

$$\frac{R'}{MI} = \frac{3IH}{MI}.$$

Portant ces valeurs dans (9), on obtient

$$\frac{R''}{3IH} = 4\frac{IH}{MI} \mp \frac{FI}{OF}. \tag{10}$$

Menons de H une perpendiculaire à OM et une parallèle à OI. Soient P, Q les points où ces droites rencontrent la normale MI. On aura alors

$$\frac{IH}{MI} = \frac{IP}{IH}, \qquad \frac{FI}{OF} = \frac{IQ}{IH}.$$

Moyennant ces valeurs, la formule (10) s'écrira

$$\frac{R''}{3IH} = 4\frac{IP}{IH} \mp \frac{IQ}{IH}$$

ou

$$R'' = 12\,IP - 3IQ.$$

Prenons $IS = 4IP$, on a alors dans tous les cas

$$R'' = 3QS.$$

Le problème précédent a été résolu également par M. Mannheim (*Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, suppléments*) comme conséquence de la construction de la normale au lieu du point H, sommet du triangle HIM, pour lequel on connaît les normales aux courbes décrites par les deux autres sommets, et les points où les côtés touchent leurs enveloppes. La construction déduite de ces considérations est moins simple que celle qui vient d'être exposée.