BULLETIN DE LA S. M. F.

S. MANGEOT

De quelques propriétés des cubiques planes et gauches

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 44-48
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__44_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

De quelques propriétés des cubiques planes et gauches;
par M. S. Mangeot.

Je considère une cubique plane, et soit ABC le triangle formé par trois droites quelconques parallèles aux trois asymptotes de la courbe. Si l'on prend ce triangle comme triangle de référence, l'équation de la courbe peut s'écrire sous la forme

$$xyz + \varphi = 0,$$

φ étant une fonction du second degré où figurent les trois paramètres qui fixent la position du triangle ABC par rapport au triangle des asymptotes. Il est possible de disposer de ces paramètres de manière à faire disparaître trois termes de la fonction φ. Parmi les formes auxquelles cette opération la ramène, j'indiquerai les trois suivantes ;

$$lyz + mzx + nxy, \quad lx^2 + my^2 + nz^2, \quad lx^2 + my^2 + n,$$

qui peuvent être obtenues, respectivement, de 3, 12 et 4 manières, et dont l'interprétation conduit aisément à ces propositions :

Parmi tous les triangles formés par des parallèles aux asymptotes d'une cubique, ou, plus généralement, par trois droites contenant trois points de la courbe donnés en ligne droite, il y en a trois qui sont inscrits dans la cubique, et douze qui ont tous leurs côtés divisés harmoniquement par la courbe.

On peut inscrire dans la cubique quatre parallélogrammes dont les diagonales soient parallèles à deux asymptotes, choisies à volonté, et, plus généralement, quatre quadrilatères dont les diagonales passent par deux points donnés P, Q *de la courbe et dont les côtés opposés se coupent en deux points situés sur la droite* PQ.

Je me bornerai à indiquer les calculs qui réduisent la fonction φ à la première des trois formes écrites, quand on part de l'équation de la courbe rapportée à ses asymptotes.

Soient

$$x_1 y_1 z_1 + A x_1 + B y_1 + C z_1 = 0,$$
$$x_1 = \lambda, \qquad y_1 = \mu, \qquad z_1 = \nu$$

les équations de la cubique et des droites BC, CA, AB, et soit

$$a x_1 + b y_1 + c z_1 = 2h$$

la relation constante qui a lieu entre les variables x_1, y_1, z_1. Rapportée au triangle ABC, la courbe sera définie par l'équation

$$(x+\lambda)(y+\mu)(z+\nu) + A(x+\lambda) + B(y+\mu) + C(z+\nu) = 0,$$

qui, sous la condition identique

$$(\mu\nu + A)x + (\nu\lambda + B)y + (\lambda\mu + C)z + \lambda\mu\nu + A\lambda + B\mu + C\nu \equiv 0,$$

prend la forme voulue, et devient

$$(1) \qquad \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{y} + \frac{\nu}{z} + 1 = 0.$$

L'identité posée exige, pour être satisfaite, que l'on ait, entre les trois paramètres λ, μ, ν et une inconnue auxiliaire S les quatre relations

$$\mu\nu = aS - A, \qquad \nu\lambda = bS - B, \qquad \lambda\mu = cS - C, \qquad \lambda\mu\nu = hS$$

L'équation qui détermine S est dès lors

$$(aS - A)(bS - B)(cS - C) = h^2S^2,$$

et les valeurs de λ, μ, ν sont $\frac{hS}{aS - A}$, $\frac{hS}{bS - B}$, $\frac{hS}{cS - C}$. Aux trois valeurs de S correspondent trois triangles inscrits dans la cubique.

La forme de l'équation (1) met en évidence des propriétés de la cubique que je vais faire connaître. Le triangle inscrit ABC, auquel la courbe est ici rapportée, et dont les côtés BC, CA, AB sont parallèles aux asymptotes B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, est inscrit également dans la conique qui correspond à l'équation

$$\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{y} + \frac{\nu}{z} = 0.$$

Les deux courbes se touchent aux trois sommets A, B, C. Les tangentes bc, ca, ab en ces points vont passer par les points p, q, r où la cubique coupe ses asymptotes, et leurs six autres points d'intersection avec ces asymptotes sont situés deux à deux sur trois droites parallèles à celles-ci et symétriques de celles-ci par rapport aux droites BC, CA, AB. Les trois points où ces mêmes tangentes bc, ca, ab rencontrent les droites BC, CA, AB appartiennent à une parallèle à la droite pqr, droite dont l'équation est

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} + \frac{z}{\nu} + 1 = 0.$$

On voit encore que les droites Aa, Bb, Cc passent par les sommets A_1, B_1, C_1 du triangle des asymptotes, et enfin que celles de toutes les droites précédemment dénommées qui contiennent les sommets du triangle ABC forment trois faisceaux harmoniques autour de ces points.

Dans le cas où le triangle formé par les asymptotes se réduit à un point, on a cette propriété :

Quand les trois asymptotes d'une cubique passent par un même point, leurs six points de rencontre avec un triangle inscrit dont les côtés leur soient parallèles, et leurs six points d'intersection (autres que ceux situés sur la courbe) avec les tangentes aux sommets de ce triangle, sont respectivement les sommets de deux hexagones homothétiques l'un de l'autre par rapport au point de concours des trois asymptotes, le rapport d'homothétie étant égal à 2.

Les résultats énoncés ci-dessus sont susceptibles d'une généralisation que met en évidence la projection conique de la cubique, et l'on peut formuler ce théorème :

Trois points p, q, r d'une cubique plane étant pris en ligne droite d'une manière quelconque, si, parmi les douze tangentes à la courbe issues de ces points, on en prend trois quelconques B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *dont les points de contact* α, β, γ *soient en ligne droite (ce qui est réalisable de seize manières), les neuf autres tangentes peuvent se partager en trois groupes de trois droites formant un triangle abc qui possède les propriétés suivantes, en désignant par* A, B, C *les points de contact de ses côtés bc, ca, ab.*

Les tangentes bc, ca, ab rencontrent respectivement les droites BC, CA, AB *en trois points situés sur une même droite, et celle-ci passe au point de concours des deux droites pqr et* $\alpha\beta\gamma$. *Les points communs aux deux triangles abc,* $A_1B_1C_1$, *et autres que p, q, r, étant joints deux à deux convenablement, donnent trois droites* δ_1, δ_2, δ_3 *qui contiennent les points* α, β, γ. *Les droites* A*a*, B*b*, C*c* *concourent en un même point, en allant passer par les points* A_1, B_1, C_1. *Toutes les droites précédemment désignées, autres que pqr, et dont le nombre est égal à* 16, *forment six faisceaux harmoniques autour des six points* A, B, C, α, β, γ.

Une extension de ce théorème aux cubiques gauches, déduite aussi de la méthode projective, donne lieu à cette proposition :

Soient α, β, γ *trois points quelconques d'une cubique gauche;* S *un point quelconque du plan* $\alpha\beta\gamma$; $SA_1B_1C_1$ *le trièdre, de sommet* S, *dont les faces ont dans leurs plans les tangentes à la courbe aux points* α, β, γ; *p, q, r les trois points,* *autres que* α, β, γ, *où ces trois plans coupent la cubique. Parmi les trièdres que forment les plans tangents menés à la cubique par les droites* Sp, Sq, Sr, *il y en a trois, tels que* Sabc, *satisfaisant aux conditions suivantes, en appelant* A, B, C *les points de contact des plans* Sbc, Sca, Sab :

Les plans des faces du trièdre SABC *passent par les points* α, β, γ. *Les arêtes des trois trièdres* SABC, SA$_1$B$_1$C$_1$, Sabc *sont trois par trois dans un même plan, et ces trois plans se coupent suivant une même droite. Les trois droites d'intersection des deux trièdres* SABC, Sabc, *autres que* SA, SB, SC, *sont dans un même plan. Les deux trièdres* SA$_1$B$_1$C$_1$, Sabc *ont six droites communes (autres que* Sp, Sq, Sr) *qui sont deux à deux dans trois plans passant par les points* α, β, γ. *Enfin, tous ceux des plans précédents, qui contiennent l'une ou l'autre des droites* Sα, Sβ, Sγ, SA, SB, SC, *forment, autour de ces six droites, six faisceaux harmoniques.*

A ce même théorème sur les cubiques planes correspond également une proposition concernant les cônes du troisième ordre. On voit facilement la modification qu'il faut apporter à l'énoncé du théorème pour obtenir celle-ci; les points et les droites doivent être remplacés respectivement par des droites et des plans qui contiennent le sommet du cône; les points et les tangentes de la cubique deviennent des génératrices et des plans tangents du cône.

Je terminerai par la remarque suivante, à laquelle conduit l'interprétation de l'équation (1) dans le cas général.

Une cubique, plane ou gauche, est le lieu d'un point tel que les rapports de trois constantes aux distances de ce point à trois plans fixes parallèles à une même droite (quelconque d'ailleurs) aient une somme égale à l'unité. Les trois plans fixes sont parallèles aux trois asymptotes de la courbe : les trois constantes sont les distances de ces asymptotes aux trois plans. Chacun des rapports est précédé d'un signe : dans le cas des figures réelles, c'est le signe $+$ ou bien le signe $-$ suivant que les deux distances qui figurent dans le rapport sont ou ne sont pas dirigées dans le même sens.