Bulletin de la S. M. F.

M. Genty

Sur les involutions linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 52-55

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__52_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les involutions linéaires; par M. MAX GENTY.

1. Nous avons donné, l'année dernière (t. XX du *Bulletin*, p. 106), quelques théorèmes, connus pour la plupart, sur les involutions linéaires d'espèce quelconque, et nous nous sommes surtout attaché à ne faire dépendre ces propriétés géométriques que d'un seul lemme analytique, le principe de correspondance de Chasles.

Nous allons donner ici un théorème qui résout dans toute sa généralité le problème des points multiples d'une involution linéaire. Ce théorème conduit donc aux propositions que nous avons données précédemment, et qui n'en sont que des cas particuliers.

2. Soit une involution linéaire de degré n et d'espèce k, que nous représenterons, d'après la notation de M. Guccia, par I_n^k, et soient s nombres positifs $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_s$ inégaux deux à deux, satisfaisant à la condition unique

$$\sum_{i=1}^{i=s} k_i = k.$$

Le théorème que nous allons démontrer consiste en ce qu'il existe un nombre fini de groupes de l'involution donnée possédant s points multiples d'ordres respectifs $[k_i+1]_{i=1}^{i=s}$. Le nombre de ces groupes est égal à

$$(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_s+1)(n-k)(n-k-1)\ldots(n-k-s+1),$$

ou encore à

$$\prod_{i=1}^{i=s}(k_i+1)\frac{(n-k)!}{(n-k-s)!}.$$

Nous désignerons, pour abréger, par $u_n^{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ le nombre cherché. Remarquons d'abord que le théorème a déjà été démontré dans les cas de $s=1$, $s=2$, $s=k$. Ce dernier cas, en particulier, correspond au théorème de M. Émile Weyr.

Ceci posé, tous les termes de l'involution I_n^k ayant, en un point donné A, un point multiple d'ordre k_s, appartiennent à une involution $I_{n-k_s}^{k-k_s}$; et il existe $u_{n-k_s}^{k_1,k_2,\ldots,k_{s-1}}$ groupes de cette involution possédant $s-1$ points multiples d'ordres respectifs $[k_i+1]_{i=1}^{i=s-1}$. En dehors de ces points multiples et du point A, tous ces groupes de I_n^k déterminent donc $(n-k-s+1)\,u_{n-k_s}^{k_1,k_2,\ldots,k_{s-1}}$ points M qui correspondent au point A. Il faut déterminer le nombre des coïncidences du point A avec un des points M.

Or, le point M étant donné, les groupes de l'involution I_n^k contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1}, et il existe $u_{n-1}^{k_1,k_2,\ldots,k_s-1}$ groupes de cette involution ayant s points multiples d'ordres respectivement égaux à k_1+1, k_2+1, $\ldots$, $k_{s-1}+1$, k_s. Nous avons donc, d'après le principe de correspondance de

Chasles

$$u_n^{k_1, k_2, \ldots, k_s} = (n - k - s + 1) u_{n-k_s}^{k_1, k_2, \ldots, k_{s-1}} + u_{n-1}^{k_1, k_2, \ldots, k_s - 1}.$$

Par des raisonnements analogues, nous obtiendrons les égalités successives

$$u_{n-1}^{k_1, k_2, \ldots, k_s - 1} = (n - k - s + 1) u_{n-k_s}^{k_1, k_2, \ldots, k_{s-1}} + u_{n-2}^{k_1, k_2, \ldots, k_s - 2},$$
$$u_{n-2}^{k_1, k_2, \ldots, k_s - 2} = (n - k - s + 1) u_{n-k_s}^{k_1, k_2, \ldots, k_{s-1}} + u_{n-3}^{k_1, k_2, \ldots, k_s - 3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_{n-k_s+1}^{k_1, k_2, \ldots, k_{s-1}, 1} = 2(n - k - s + 1) u_{n-k_s}^{k_1, k_2, \ldots, k_{s-1}}.$$

Nous avons donc, par l'addition des relations précédentes,

$$u_n^{k_1, k_2, \ldots, k_s} = (k_s + 1)(n - k - s + 1) u_{n-k_s}^{k_1, k_2, \ldots, k_{s-1}}.$$

Nous avons ainsi ramené le calcul du nombre cherché à celui d'un nombre analogue, mais dont l'involution correspondante n'a plus que $s - 1$ points multiples au lieu de s. Par l'application répétée du procédé donné, nous obtiendrons donc bien la formule

$$u_n^{k_1, k_2, \ldots, k_s} = \prod_{i=1}^{i=s} (k_i + 1) \frac{(n - k)!}{(n - k - s)!}.$$

Remarque. — Nous avons supposé jusqu'ici les quantités k_i inégales deux à deux. Si q de ces quantités devenaient égales, le nombre précédent devrait être divisé par $q!$

3. Nous voyons, d'après cela, qu'une involution linéaire quelconque I_n^k peut présenter, par rapport à ses points multiples, un grand nombre de formes différentes, et qu'il existe certaines involutions possédant depuis un point multiple jusqu'à k points doubles. Le calcul du nombre de ces formes nous ramène à une question d'Arithmétique qui n'est autre que la *partition des nombres*.

4. Pour démontrer l'utilité du théorème précédent, nous allons en donner une application géométrique.

Considérons une courbe unicursale C_n de degré n. Les sphères de l'espace déterminent sur cette courbe une involution I_{2n}^4. Nous pouvons donc prendre, conformément au théorème précédent,

$$s = 2, \qquad k_1 = k_2 = 2.$$

En tenant compte de la remarque faite à la suite du théorème, nous en déduirons

$$u_{2;n}^{2;2} = \tfrac{9}{2}(2n - 4)(2n - 5) = 9(n - 2)(2n - 5).$$

En particulier, si $n = 3$, le nombre précédent se réduit à 9. Nous obtenons donc sans calcul et très facilement la proposition géométrique suivante : *Toute cubique gauche possède* 9 *couples de cercles osculateurs situés sur une même sphère.*