BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CARVALLO

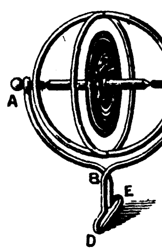
Théorie du pied équilibriste du gyroscope Gervat

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 55-61
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__55_1>

Théorie du pied équilibriste du gyroscope Gervat;
par M. E. Carvallo.

1. *Description de l'appareil.* — Le pied équilibriste ABCDE (*fig.* 1) est formé d'un fil métallique de $1^{mm},5$ de diamètre environ. Il se compose à peu près d'un demi-cercle vertical ABC muni, au bas, d'un appendice BDE qui a pour but de le faire re-

Fig. 1.



poser, sur le plan horizontal, par la partie DE qui est rectiligne et perpendiculaire au plan du cercle ABC. En A et C, le fil est doublement recourbé de façon à former deux coussinets qui reçoivent les extrémités de l'axe de la toupie gyroscopique. Dans cette position, le plan moyen du tore de la toupie passe par DE.

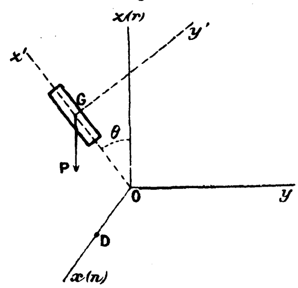
Si la toupie ne tourne pas, l'équilibre est instable, le tout bascule autour de DE. Mais si la toupie tourne sur elle-même avec une grande vitesse (environ 50 tours par seconde), le système semble être en équilibre stable. De là le nom de *pied équilibriste* donné par l'inventeur à ce jouet. En réalité, le pied exécute autour de la position apparente d'équilibre des oscillations manifestées par un son qui, dans des conditions normales, n'est pas éloigné de l'octave inférieure du *la* des diapasons.

Tels sont les faits que nous allons expliquer par la théorie, en négligeant les frottements.

2. *Choix des données et des inconnues.* — Je compterai toutes les rotations positivement de droite à gauche. Les données sont (*fig.* 2) :

ω_0, vitesse de rotation initiale de la toupie autour de son axe Gy';
θ_0, angle initial que fait, avec la verticale Oz, la perpendiculaire OG abaissée, du centre G de la toupie, sur l'axe DE;
a, longueur de cette perpendiculaire OG;
A, B, $C = A$, moments principaux d'inertie de la toupie, relatifs,

Fig. 2.



B à l'axe Gy', A et C à deux droites Gx', Gz' perpendiculaires à Gy';
P, poids de la toupie.

Devant ce poids, je négligerai celui de la monture et du pied, ce qui simplifiera les écritures sans dénaturer les résultats.

Les inconnues sont :

ω, vitesse de rotation de la toupie relativement à sa monture;
$n = \frac{d\theta}{dt}$, vitesse de rotation du pied équilibriste autour de ED;
r, vitesse de rotation du pied autour de la verticale Oz;
v, vitesse vecteur du point O sur le plan horizontal.

3. *Mise en équations du problème.* — Les forces extérieures se réduisent au poids P appliqué en G. Pour déterminer les inconnues, nous appliquerons les principes suivants :

1° Théorème des quantités de mouvement projetées sur le plan horizontal;

2° Équation d'Euler, pour l'axe Gy' de la toupie;

3° Théorème du moment des quantités de mouvement par rapport à la verticale du point G;

4° Théorème des forces vives.

I. Le premier principe nous apprend que la projection horizontale du point G est fixe, ce qui détermine la vitesse v du point O en fonction des autres inconnues. Mais l'expérience (et, comme on va le voir, le calcul) montre que θ ne s'écarte jamais sensiblement de θ_0. Il en résulte que le point O restera sensiblement fixe. Nous laisserons de côté ce mouvement qui est le plus fortement troublé par les frottements négligés.

II. *La rotation de la toupie autour de son axe* Gy' se compose de deux parties : sa rotation relative ω, puis la rotation de la monture dont la composante suivant Gy' est $+ r\sin\theta$.

D'autre part, les moments d'inertie A et C sont égaux et, de plus, le moment de la force P, par rapport à Gy', est nul. L'équation d'Euler, pour l'axe Gy', est donc

$$B\frac{d}{dt}(\omega + r\sin\theta) = 0.$$

Cette équation s'intègre et donne

$$\omega + r\sin\theta = \omega_0. \tag{1}$$

III. *Le moment de la force* P *par rapport à la verticale étant constamment nul, le moment des quantités de mouvement est constant.* Or les rotations sont n, r et ω, et leurs composantes suivant les axes principaux d'inertie du point G sont

$$n, \qquad p = \omega + r\sin\theta, \qquad q = r\cos\theta.$$

Les moments principaux d'inertie sont donc, en remplaçant $\omega + r\sin\theta$ par sa valeur ω_0,

$$An, \quad B\omega_0, \quad Cr\cos\theta.$$

Le moment d'inertie par rapport à la verticale du point G sera, en remplaçant C par son égal A,

$$B\omega_0\sin\theta + Ar\cos^2\theta.$$

En exprimant que ce moment est constant, il vient

$$B\omega_0(\sin\theta - \sin\theta_0) + A r \cos^2\theta = 0,$$

d'où l'on tire

$$r = -\frac{B\omega_0(\sin\theta - \sin\theta_0)}{A\cos^2\theta}. \tag{2}$$

IV. *L'accroissement de force vive,* depuis l'état initial, est égal au travail de la pesanteur, savoir :

$$Pa(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Cette force vive se compose de celle du point G, qui est (¹)

$$\frac{P}{2g} a^2 n^2 \sin^2\theta,$$

et de celle des trois rotations

$$n, \qquad p = \omega_0, \qquad q = r\cos\theta.$$

La force vive de la rotation résultante est

$$\frac{1}{2}[An^2 + B\omega_0^2 + Cr^2\cos^2\theta].$$

L'accroissement de la force vive totale, depuis l'état initial, est donc

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P}{g} a^2 n^2 \sin^2\theta + An^2 + Cr^2\cos^2\theta\right),$$

et le théorème des forces vives donne, en remplaçant C par son égal A,

$$\left(\frac{P}{g} a^2 \sin^2\theta + A\right) n^2 + Ar^2\cos^2\theta = 2Pa(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Si, dans cette équation, je remplace r par sa valeur (2), j'obtiens, pour déterminer n, la formule

$$n = \pm\sqrt{\frac{2Pa(\cos\theta_0 - \cos\theta) - \dfrac{B^2\omega_0^2}{A\cos^2\theta}(\sin\theta - \sin\theta_0)^2}{A + \dfrac{P}{g}a^2\sin^2\theta}}. \tag{3}$$

Les formules (1), (2), (3) résolvent le problème.

(¹) La projection horizontale du centre de gravité étant fixe, la vitesse se réduit à sa composante verticale.

4. *Conséquences de la formule* (3). — Elle montre que θ ne peut jamais différer de θ_0 que d'une quantité très petite ; car, si l'on attribue à θ une valeur notablement différente de θ_0, le second terme du numérateur devient prépondérant à cause de la grandeur du coefficient $\frac{B^2\omega_0^2}{A}$ qui, pour la vitesse normale de 50 tours par seconde, vaut environ 7000 fois le coefficient $2Pa$. Il en résulterait pour n une valeur imaginaire, ce qui est inadmissible. On peut alors se rendre compte du mouvement ainsi : au début, n et r étant nuls, la pesanteur tend à augmenter θ ; $n = \frac{d\theta}{dt}$ prend donc des valeurs positives jusqu'à ce que θ atteigne la valeur θ_1 qui annule le radical. Alors θ ne peut plus augmenter. Il diminuera, n prendra des valeurs négatives jusqu'à ce que θ reprenne la valeur θ_0, et ainsi de suite. La toupie oscillera donc entre l'azimut initial θ_0 et un azimut très voisin $\theta_1 = \theta_0 + \varepsilon_1$.

5. *Intégration approchée des équations* (2) *et* (3). Ces prévisions conduisent à chercher des formules approchées en prenant pour inconnue [1]

$$\varepsilon = \theta - \theta_0,$$

d'où l'on tire

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon,$$

$$\cos\theta_0 - \cos\theta = \varepsilon \sin\theta_0 + \ldots,$$

$$\sin\theta - \sin\theta_0 = \varepsilon\cos\theta_0 + \ldots.$$

En portant ces valeurs dans la formule (3), on peut mettre celle-ci sous la forme

$$n = \pm\beta\sqrt{\alpha(\varepsilon\sin\theta_0 + \ldots) - \frac{\varepsilon^2\cos^2\theta_0 + \ldots}{\cos^2\theta}},$$

dans laquelle on a posé

$$\beta = \frac{B\omega_0}{\sqrt{A\left(A + \frac{P}{g}a^2\sin^2\theta\right)}}, \qquad \alpha = \frac{2PaA}{B^2\omega_0^2}.$$

Cette formule met en évidence que la valeur ε_1 de ε, qui annule le radical, est du même ordre de petitesse que $\alpha\sin\theta_0$; et, d'après

(1) J'emprunte cette transformation au Cours de M. Resal à l'École Polytechnique.

ce que nous avons dit, α est environ $\frac{1}{7000}$. Si l'on borne à leurs premiers termes les développements suivant les puissances croissantes de ε, il vient

$$\varepsilon_1 = \alpha \sin\theta_0, \qquad n = \frac{d\varepsilon}{dt} = \pm\beta\sqrt{\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon)}.$$

Cette formule s'intègre facilement si l'on remarque que, θ variant peu, β peut être regardé comme constant. En déterminant la constante d'intégration de façon que ε soit nul à l'origine, on obtient

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2}\cos\beta t = \varepsilon_1 \sin^2\frac{\beta t}{2}.$$

D'après cela, θ oscille d'*un mouvement pendulaire* entre θ_0 et $\theta_0 + \varepsilon_1$. Sa valeur moyenne est $\theta_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}$.

Voyons ce que devient la rotation r autour de Oz. Avec la même approximation, la formule (2) donne

$$r = -\frac{B\omega_0}{A\cos\theta_0}\varepsilon = \gamma\varepsilon,$$

où l'on a posé

$$\gamma = -\frac{B\omega_0}{A\cos\theta_0}.$$

En remplaçant r par $\frac{d\psi}{dt}$ et intégrant, on trouve

$$\psi = \gamma\int\varepsilon\, dt = \gamma\left(\frac{\varepsilon_1 t}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2\beta}\sin\beta t\right).$$

Ce mouvement angulaire se compose d'un terme uniforme et d'un terme périodique. La vitesse du mouvement uniforme est

$$\frac{\gamma\varepsilon_1}{2} = -\frac{B\omega_0}{A\cos\theta_0}\,\frac{PaA\sin\theta_0}{B^2\omega_0^2} = -\frac{Pa}{B\omega_0}\operatorname{tang}\theta_0.$$

Dans les conditions normales dont j'ai parlé, $\frac{Pa}{B\omega_0}$ a environ pour valeur 0,1. Quand le pied équilibriste est placé presque vertical, le second facteur $\operatorname{tang}\theta_0$ aussi est petit, de sorte que la vitesse de rotation $\frac{\gamma\varepsilon_1}{2}$ est faible. Si, par exemple, θ_0 est de 1°, cette rotation $\frac{\gamma\varepsilon_1}{2}$ sera de 0°,1 par seconde. Elle sera inappréciable. Elle devient sensible pour des valeurs plus petites de ω_0 et des valeurs plus grandes de θ_0. Quant au terme périodique de ψ, il a même période que ε. La phase est seulement changée de $\frac{1}{4}$.

L'amplitude est sensiblement la même, parce que γ est presque égal à β.

6. *Conclusions.* — En résumé, le mouvement apparent est une rotation autour de la verticale. Cette rotation, insensible quand le pied est presque vertical, est accompagnée de deux vibrations, l'une autour de la verticale, l'autre autour de DE. Ce sont ces vibrations qui, par le jeu des forces centrifuges composées, maintiennent l'équilibre apparent.

On peut le vérifier expérimentalement en plaçant DE dans la rainure d'un parquet. La variation de l'angle ψ étant alors rendue impossible, le système bascule autour de DE.