SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 66-72
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__66_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 MAI 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Touche : *Transformation des équations générales du mouvement des fluides.*

M. Tchebicheff : *Représentation approchée de* $(a - x)^{-1}$ *par des fonctions entières.*

M. Raffy : *Sur certaines équations différentielles du premier ordre qui s'intègrent par différentiation.*

M. d'Ocagne, en présentant la nouvelle édition, revue et corrigée, de l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques,* informe ses collègues que la Société mathématique d'Amsterdam vient de commencer la publication d'un nouveau recueil qui, sous le titre de *Revue semestrielle des publications mathématiques,* donne l'inventaire de tous les travaux mathématiques publiés dans le semestre écoulé, avec la classification admise pour le *Répertoire,* et, après le titre de chaque Mémoire, un résumé succinct rédigé en français, sauf pour les recueils anglais et allemands, qui sont analysés dans leur langue.

SÉANCE DU 15 MAI 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Laisant : *Expression des coefficients du binôme par des déterminants.*

M. Raffy : *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale s'obtient en remplaçant la dérivée par une constante.*

M. Humbert : *Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques aux intégrales elliptiques.*

M. Félix Lucas fait la Communication suivante :

Sur la nature des grandeurs magnétiques et électriques.

Les théories de l'électricité et du magnétisme reposent sur quatre formules élémentaires qui sont :

La formule de Coulomb, pour l'action mutuelle de deux masses électriques ε et ε',

$$\varphi = h\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r^2};$$

La formule de Coulomb, pour l'action mutuelle de deux masses magnétiques μ et μ',

$$\varphi = k\frac{\mu\mu'}{r^2};$$

La formule d'Ampère, pour l'action mutuelle de deux éléments de courant $i\,ds$ et $i'\,ds'$,

$$\varphi = \alpha\frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right);$$

La formule de Laplace, pour l'action mutuelle d'une masse magnétique μ et d'un élément de courant ids,

$$\varphi = \lambda\frac{\mu\,ids\sin\theta}{r^2}.$$

Les constantes h, k, α et λ sont des paramètres d'homogénéité. Désignons par L, M, T les unités fondamentales de longueur, de masse et de temps, par $F = LMT^{-2}$ l'unité symbolique de force, et par μ et ε les unités de masse magnétique et de masse électrique considérées comme deux nouvelles unités fondamentales. Nous aurons, en remarquant que, d'après la définition même de l'intensité d'un courant, cette intensité doit admettre l'unité dérivée εT^{-1},

$$(1)\qquad \begin{cases} h = FL^2\mu^{-2}, & k = FL^2\varepsilon^{-2}, \\ \alpha = FT^2\varepsilon^{-2}, & \lambda = FLT\varepsilon^{-1}\mu^{-1}. \end{cases}$$

En éliminant F entre ces quatre formules d'homogénéité, on trouve

$$(2)\qquad \mu^2\varepsilon^{-2} = hk^{-1} = \alpha k^{-1}L^2T^{-2} = \lambda^2 k^{-2}L^2T^{-2}.$$

Les deux dernières égalités, envisagées séparément, donnent

$$(3)\qquad h = \alpha L^2T^{-2} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \alpha k.$$

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus* du 17 avril dernier, M. Mercadier a obtenu ces deux formules en supposant, comme on le fait généralement, que les masses magnétique et électrique μ et ν admettent toutes deux l'unité symbolique $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$; on voit, par ce qui précède, que ces deux formules existent indépendamment de toute hypothèse sur la nature de μ et de ν. C'est en regardant h et k, coefficients concrets des formules de Coulomb, comme des coefficients purement numériques, que les électriciens ont été conduits à attribuer à μ et à ν l'unité symbolique $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$; si l'on raisonnait de même sur la formule de l'attraction newtonienne des masses matérielles, on serait conduit à attribuer à la masse matérielle l'unité symbolique L^3T^{-2}, résultat évidemment inadmissible. En réalité rien n'autorise, dans l'état actuel de la science électrique et magnétique, à attribuer à μ et à ν des unités symboliques fonctions de L, M, T. L'expérience conduit seulement, en électromagnétisme, à regarder comme homogènes entre elles la puissance magnétique d'un feuillet qui, par définition, admet l'unité dérivée $L^{-1}\mu$ et l'intensité d'un courant dont l'unité dérivée est $T^{-1}\varepsilon$. On peut, par conséquent, établir entre la masse magnétique μ et la masse électrique ε la corrélation

$$L^{-1}\mu = T^{-1}\varepsilon, \tag{4}$$

qui assimile la masse magnétique au produit d'une masse électrique par une vitesse, soit, pour ainsi dire, à une quantité de mouvement électrique. Les formules (2) se réduisent alors à

$$hL^{-2}T^2 = k = \alpha = \lambda. \tag{5}$$

Une grandeur électrique ou magnétique quelconque admet alors une unité symbolique exprimable soit au moyen de μ, soit au moyen de ε, conjointement avec L, M, T; de là les deux notations

$$L^\alpha M^\beta T^\gamma (L^{-1}\mu)^\delta \quad \text{et} \quad L^\alpha M^\beta T^\gamma (T^{-1}\varepsilon)^\delta,$$

dont le rapport

$$\left(\frac{L^{-1}\mu}{T^{-1}\varepsilon}\right)^\delta \tag{6}$$

est purement numérique. Si l'on remplaçait μ par $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$, on obtiendrait la notation dite *électromagnétique;* de même si l'on remplaçait ε par $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$, on obtiendrait la notation dite *électrostatique;* dans ces conditions le rapport (6) cesserait d'être abstrait et deviendrait une puissance de vitesse $(LT^{-1})^{-\delta}$. Tel est le motif pour lequel le rapport des unités symboliques électromagnétique et électrostatique d'une même grandeur est toujours une puissance de la vitesse LT^{-1}.

Ces considérations montrent qu'il faut actuellement, pour établir rationnellement les théories électriques et magnétiques, adjoindre aux unités fondamentales L, M, T de la Mécanique une quatrième unité fondamentale, soit, par exemple et de préférence, l'unité I d'intensité de courant ou de puissance magnétique. Si l'on remarque d'ailleurs que, dans les théories dont il s'agit, la masse matérielle M n'est jamais mise directement en cause, tandis qu'il en est tout autrement de l'*énergie,* dont l'unité symbolique est L^2MT^{-2}, on pressent qu'il serait avantageux de substituer l'unité d'énergie Θ à l'unité de masse. Toutes les grandeurs magnétiques et électriques ont des unités symboliques faciles à exprimer au moyen de L, T, I, Θ considérées comme unités fondamentales. Ce système rationnel conduit aux notations suivantes :

Masse magnétique ou quantité de magnétisme........	LI
Masse électrique ou quantité d'électricité	TI
Force magnétique, intensité de champ magnétique	$L^{-2}I^{-1}\Theta$
Force électrique, intensité de champ électrique	$L^{-1}T^{-1}I^{-1}\Theta$
Potentiel magnétique, force magnétomotrice	$L^{-1}I^{-1}\Theta$
Potentiel électrique, force électromotrice............	$T^{-1}I^{-1}\Theta$
Flux de force ou d'induction magnétique.............	$I^{-1}\Theta$
Flux de force électrique	$LT^{-1}I^{-1}\Theta$
Moment magnétique	L^2I
Intensité d'aimantation	$L^{-1}I$
Capacité électrique	$T^2I^2\Theta^{-1}$
Puissance magnétique, intensité de courant	I
Coefficients d'induction mutuelle et de self-induction .	$I^{-2}\Theta$
Réluctance ou résistance magnétique	L^{-1}
Résistance électrique............................	$T^{-1}I^{-2}\Theta$

SÉANCE DU 7 JUIN 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Fouret : *Sur le rôle du complexe linéaire en Statique et en Cinématique.*

M. d'Ocagne : *Étude de la convergence et de la sommation d'une classe particulière de séries.*

M. A. Chailan : *Sur le mouvement d'un système à liaisons complètes.*

SÉANCE DU 21 JUIN 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Sélivanoff : *Sur l'équation du cinquième degré.*

M. Painlevé : *Sur le problème de Dirichlet.*

M. Kobb : *Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables.*

M. d'Ocagne : *Sur une déformation de la sphère.*

M. Raffy fait la Communication suivante :

Sur une classe nouvelle de surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sans altération des courbures principales.

Ossian Bonnet, dans l'*Addition* jointe à son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Journal de l'École Polytechnique,* XLII^e Cahier), s'est proposé de trouver toutes les surfaces déformables sans altération des courbures principales. L'ensemble des surfaces qui admettent une infinité de déformations pareilles se compose : 1° de certains cônes; 2° de toutes les surfaces à courbure moyenne constante; 3° d'une classe étendue de surfaces dont l'élément linéaire dépend de deux fonctions arbitraires; 4° de certaines surfaces applicables sur des surfaces de révolution.

Voici comment sont définies les surfaces de la troisième classe. Désignant par X et Y deux fonctions arbitraires, l'une de x, l'autre de y, après avoir posé $u + iv = x$, $u - iv = y$; et représentant par ω le double de l'angle que fait l'une des lignes de courbure avec la courbe $u = \text{const.}$, l'illustre géomètre trouve

$$ds^2 = -(x+y)^2 \frac{X'Y'\,dx\,dy}{(X+Y)^2}, \qquad e^{i\omega} = \frac{(Y-m)\sqrt{X'}}{(X+m)\sqrt{Y'}};$$

puis, ayant fait ressortir la généralité de ces surfaces, il passe à celles de la quatrième classe.

A raison du petit nombre des surfaces isothermiques connues jusqu'à ce jour, il y a lieu de signaler comme telles les surfaces d'Ossian Bonnet. Pour nous assurer du fait, rappelons que les deux systèmes de lignes de courbure ont respectivement pour équations différentielles

$$\frac{du}{dv} = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}, \qquad \frac{du}{dv} = -\cot\frac{\omega}{2},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$dx + e^{-i\omega}dy = 0, \qquad dx - e^{-i\omega}dy = 0.$$

L'exponentielle étant remplacée par son expression, il vient

$$\frac{\sqrt{X'}}{X+m}dx + \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m}dy = 0, \qquad \frac{\sqrt{X'}}{X+m} - \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m}dy = 0.$$

Si l'on désigne par α et β les paramètres des lignes de courbure et qu'on fasse

$$\frac{\sqrt{X'}}{X+m}dx + \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m}dy = d\alpha,$$
$$\frac{\sqrt{X'}}{X+m}dx - \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m}dy = d\beta,$$

on trouvera immédiatement

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = \frac{4\sqrt{X'Y'}}{(X+m)(Y-m)}\,dx\,dy.$$

Ainsi, quelle que soit la constante m, le produit $dx\,dy$ est proportionnel à $d\alpha^2 - d\beta^2$, ce qui montre que *les surfaces considérées ont leurs lignes de courbure isothermes et conservent cette propriété dans toutes les déformations qui n'altèrent pas leurs courbures principales.*

Relativement aux surfaces 4° qui complètent la solution de son problème, Ossian Bonnet les signale bien comme étant applicables sur des surfaces de révolution et dit implicitement (*loc. cit.*, p. 85) que leurs courbures principales sont fonctions l'une de l'autre, mais il n'insiste pas sur ces deux propriétés remarquables et ne se préoccupe pas de savoir s'il a trouvé toutes les surfaces douées de l'une et de l'autre. D'une Note que j'ai publiée sur ce sujet dans ce Recueil (t. XIX, p. 158) il résulte que, si l'on fait abstraction des hélicoïdes et des surfaces à courbure totale constante, *toutes les surfaces applicables sur une surface de révolution et dont les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre admettent une infinité de déformations qui n'altèrent pas leurs courbures principales.*

Au cours de recherches encore inédites sur les surfaces isothermiques dont les courbures principales sont liées par une relation, M. Caronnet a trouvé des surfaces applicables sur des surfaces de révolution et il a démontré que *toute surface applicable sur une surface de révolution et dont les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre est une surface isothermique.*

Il suit de là et de l'énoncé précédent que les surfaces de la quatrième classe d'Ossian Bonnet sont toutes isothermiques. Nous venons de voir qu'il en est ainsi des surfaces de la troisième classe, et l'on sait que tel est aussi le cas des cônes et des surfaces à courbure moyenne constante. On peut donc énoncer ce théorème, vrai sans aucune restriction : *Toute surface, qui admet une série de déformations n'altérant pas ses courbures principales, est une surface isothermique et conserve cette propriété dans toutes ces déformations.*