BULLETIN DE LA S. M. F.

G. ARNOUX

Technologie graphique ; appareil pour la décomposition d'un polynôme en facteurs

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 87-92

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__87_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Technologie graphique; appareil pour la décomposition d'un polynôme en facteurs; par M. G. Arnoux.

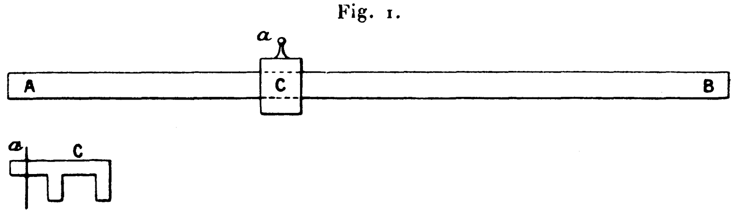
Le problème *pratique* de la décomposition d'un polynôme en facteurs, ou de la résolution des équations, a été étudié par d'illustres géomètres, tels que Newton et Lagrange, qui en ont proclamé l'importance.

Soit par des moyens symboliques, pour les premiers degrés ou dans des cas particuliers, soit par des moyens graphiques tels que les courbes d'erreurs, on peut parvenir à cette décomposition d'une façon plus ou moins pénible, suivant les cas.

Dans cette Communication, nous voulons aujourd'hui donner la description d'un petit appareil, très simple, qui permet d'obtenir avec une certaine approximation *toutes les solutions réelles* d'une équation à coefficients réels d'un degré quelconque.

Soit AB une règle métallique bien droite (pour laquelle il serait avantageux d'employer la forme en cornière afin d'éviter les déviations), règle sur laquelle un curseur muni d'une aiguille a glisse à frottement, cette aiguille étant elle-même mobile dans une petite douille (*fig.* 1).

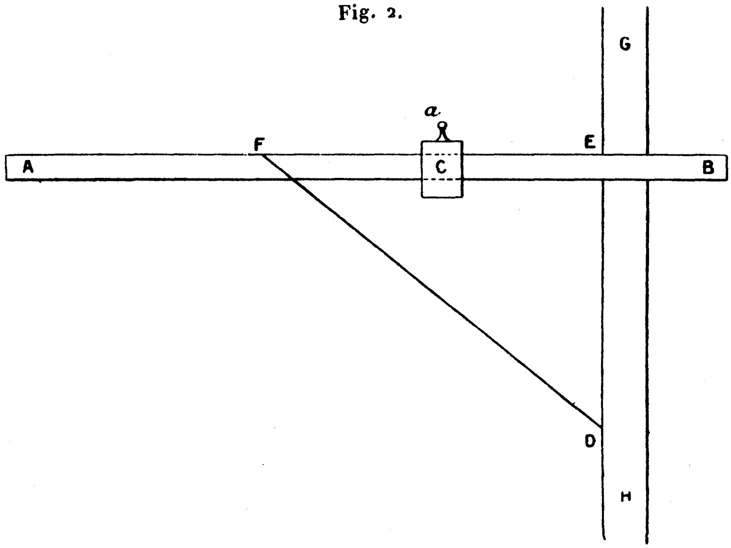
Fig. 1.



Collez cette règle sur une équerre DEF, de manière qu'elle dépasse au delà du point E d'une longueur suffisante pour couvrir une règle de même épaisseur que l'équerre (*fig.* 2).

Si l'on voulait obtenir une grande précision, et une rapidité et une commodité d'opération plus considérables, on pourrait fixer la règle sur une table où elle tournerait autour d'un pivot. La règle et l'équerre seraient graduées et munies d'un vernier dont l'aiguille faciliterait au plus haut point l'emploi; mais, pour la

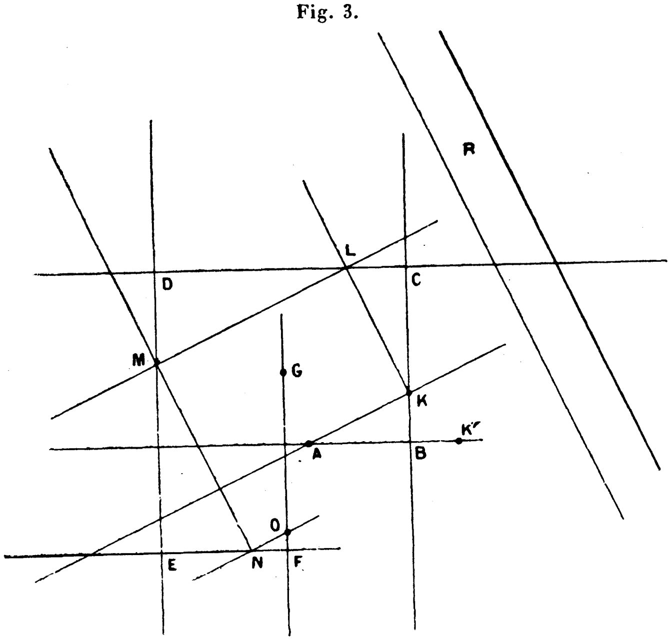
Fig. 2.



théorie, l'appareil que nous venons de décrire suffit.

Voici maintenant la manière de l'appliquer (*fig.* 3).

Fig. 3.



Soit ABCDEFG le représentant graphique ([1]) d'un polynôme du cinquième degré, à coefficients réels, en faisant $x = \sqrt{-1}$. Il est parfaitement évident que l'on pourrait donner à x telle valeur que l'on voudrait $\sqrt[m]{+A}$, et que, théoriquement, le procédé serait identiquement le même; mais il en résulterait une complication pour les grandeurs de translation et de rotation, que la valeur $\sqrt{-1}$ évite.

Toutes les opérations sont ramenées à l'emploi de l'équerre, ce qui simplifie au plus haut point les opérations.

La solution de l'équation

$$A_0 x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x^1 + A_5 x^0 = 0$$

est ramenée à la décomposition du polynôme du premier membre en ses facteurs. Graphiquement, cela revient à inscrire sur le 6-latère rectangulaire ABCDEFG un 5-latère rectangulaire dont le 1er latère passe par le point A et le dernier par le point G, car, suivant la théorie de la méthode graphique,

$$\text{AKLMNO} \times \text{ABK} = \text{ABCDEFO},$$

AKLMNO étant un 5-latère correspondant à l'un des facteurs du quatrième degré et jouant le rôle de multiplicateur, et ABK un 2-latère correspondant à un facteur du premier degré, jouant le rôle de multiplicande.

Posons la règle en dehors du graphique dans une direction quelconque, faisons glisser l'équerre sur la règle et le curseur sur la règle métallique, de manière que l'aiguille se pose en A. Un glissement du curseur donne instantanément le point K, un glissement de l'équerre sur la règle (le curseur étant immobile) donne le point L. Un nouveau glissement du curseur (l'équerre étant immobile) donne le point M; et, en procédant de la même façon, on obtient N et O.

Il est évident que l'angle BAK est trop faible et qu'il faut faire tourner la règle d'une certaine quantité pour rapprocher d'abord et pour amener ensuite aussi exactement que possible le point O

([1]) Pour la représentation graphique des polynômes et la notion des latères (1-latère, 2-latère, etc.), se reporter à mes *Essais sur l'Algèbre graphique,* Digne, 1890.

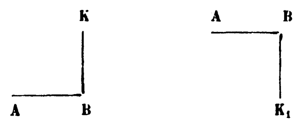
à coïncider avec le point G; au moment où ce résultat est obtenu, ABK est un des facteurs du 1er degré de ABCDEFG et $-\frac{BK}{AB}=\frac{KB}{AB}$ est une des racines réelles de l'équation, multipliée par $\sqrt{-1}$.

Si l'on divise par $\sqrt{-1}$, en faisant tourner la direction de BK du quart de tour complet, ABK' est le facteur du premier degré du 6-latère que l'on obtiendrait en faisant $x=+1$; ou graphiquement, en faisant faire de gauche à droite à BC un quart de tour, à CD un demi, à DE trois quarts, à EF un tour, à FG un tour et quart, ce qui donnerait une ligne droite, tous les latères ayant ainsi une seule et même direction.

Nous avons choisi comme exemple un polynôme à coefficients tous positifs, ce qui donne une ligne polygonale convexe. Mais l'opération graphique serait absolument identique si certains de ces coefficients étaient négatifs. La seule précaution qu'il faudrait prendre serait de numéroter les latères du produit (AB — 1), (BC — 2), (CD — 3), (DE — 4), (EF — 5), (FG — 6) et de faire attention que A est sur le premier latère, K sur le second, L sur le troisième, et ainsi de suite; de cette manière aucune erreur n'est possible.

Si le polynôme avait des coefficients positifs et négatifs, les deuxièmes latères des facteurs du premier degré auraient tantôt la

Fig. 4.



forme ABK, tantôt la forme ABK_1, la première correspondant aux racines positives, la seconde aux racines négatives. L'étendue des tâtonnements en serait augmentée, de sorte qu'il vaut mieux, au moyen des procédés donnés dans tous les traités d'Algèbre élémentaire, ramener le polynôme à cette forme. Alors tous les 2-latères facteurs ont la forme ABK et le tâtonnement est terminé quand le point K a parcouru toute la longueur BC.

Pour obtenir tous les facteurs dans ce cas, il faut d'abord poser la règle perpendiculairement à la direction de l'A_0 (ici AB), puis la faire tourner jusqu'à ce que l'équerre amène l'aiguille sur le point C, de sorte qu'il suffit alors de faire parcourir au point K la longueur BC.

Chaque fois que l'on atteindra le point G, ABK sera facteur de ABCDEFG. Si toutes les racines sont réelles, cela arrivera cinq fois et pas davantage; si elles ne le sont pas toutes, on l'atteindra autant de fois qu'il y a de racines réelles.

Pour ne pas allonger outre mesure cette Communication, nous nous abstiendrons de faire ressortir toutes les conséquences intéressantes qui résultent de la correspondance des méthodes graphiques et symboliques. Ainsi, si toutes les racines sont réelles, le latère BC est la somme de tous les latères BK des facteurs. Si au lieu de x on veut $\frac{1}{x}$, on n'a qu'à retourner le 6-latère en prenant GF pour A_0, FE pour A_1 et ainsi de suite, et l'on a GFEDCBA correspondant à l'équation

$$A_5\left(\frac{1}{x}\right)^5+A_4\left(\frac{1}{x}\right)^4+A_3\left(\frac{1}{x}\right)^3+A_2\left(\frac{1}{x}\right)^2+A_1\left(\frac{1}{x}\right)^1+A_0\left(\frac{1}{x}\right)^0=0.$$

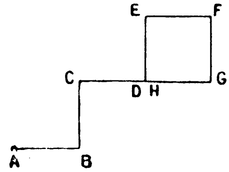
Il y aurait encore une foule d'autres considérations trop longues à énumérer. Cependant, nous croyons devoir faire une observation finale sommaire, qui a son importance. Chacun reconnaît l'importance théorique du théorème de Sturm pour la détermination du nombre des racines réelles entre deux limites données. Mais on sait aussi combien l'application pratique de cette méthode peut devenir pénible, presque impossible, même dans des cas relativement simples. Par exemple, pour l'équation

$$x^6+x^5-x^4-x^3+x^2-x+1=0,$$

le nombre constant V_6 qui termine la suite des fonctions de Sturm n'a pas moins de *quarante-quatre chiffres*.

Or, si l'on représente graphiquement le polynôme ci-dessus,

Fig. 5.



en faisant $x=\sqrt{-1}$, on a le graphique ABCDEFGH; et le premier venu, au bout de quelques instants, après quelques tâtonnements rapides à l'aide du petit instrument qui vient d'être décrit, pourra répondre à la question posée.