BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DEMOULIN

Sur la congruence des axes centraux, des complexes linéaires passant par trois droites données

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 92-96

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__92_1>

Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données; par M. A. DEMOULIN.

1. Cette congruence jouit d'un grand nombre de propriétés intéressantes qui ont été mises en évidence par MM. Ball (1), Stahl (2) et Waelsch (3). Dans la présente Note, nous démontrons, au sujet de cette congruence, la proposition suivante, qui nous semble nouvelle :

Jointe à une congruence du premier ordre et de la première classe, la congruence actuelle constitue l'intersection complète des complexes de Painvin relatifs à deux quadriques dégénérées (4).

2. Soient D_1, D_2, D_3 les trois droites données et H l'hyperboloïde qu'elles déterminent. Nous appellerons *génératrices du premier système* les génératrices de cet hyperboloïde qui ne coupent pas D_1, D_2, D_3 et *génératrices du second système* celles qui coupent ces droites. Tout complexe L passant par D_1, D_2, D_3 renferme toutes les génératrices du premier système de l'hyperboloïde H. Cette propriété, dont la démonstration est immédiate, permet d'établir simplement l'équation générale des complexes L. Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation de l'hyperboloïde H rapporté à ses axes. Les équations

(1) *Mathematische Annalen*, t. IX, p. 541.

(2) *Journal de Crelle*, t. 91, p. 1.

(3) *Sitzungsberichte* de l'Académie des Sciences de Vienne; t. XCV, p. 781, 1887.

(4) Dans une Note insérée au tome XX de ce *Bulletin* (p. 122), nous avons appelé *complexe de Painvin* d'une quadrique le complexe des droites par lesquelles on peut mener à cette quadrique deux plans tangents rectangulaires.

d'une génératrice quelconque du premier système peuvent être mises sous la forme

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\theta + \sin\theta,$$

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\theta - \cos\theta$$

ou

$$\frac{x - a\sin\theta}{a\cos\theta} = \frac{y + b\cos\theta}{b\sin\theta} = \frac{z}{c},$$

θ désignant un paramètre variable. Cette génératrice passe par le point $(a\sin\theta, -b\cos\theta, 0)$ et elle a pour coefficients de direction $a\cos\theta$, $b\sin\theta$, c; ses coordonnées homogènes $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ sont donc

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha = a\cos\theta, & \beta = b\sin\theta, & \gamma = c, \\ p = -bc\cos\theta, & q = -ac\sin\theta, & r = ab. \end{cases}$$

Ces équations montrent que les génératrices du premier système de l'hyperboloïde H appartiennent aux trois complexes linéaires

$$(2) \qquad bc\alpha + ap = 0, \qquad ac\beta + bq = 0, \qquad ab\gamma - cr = 0;$$

par conséquent, les complexes L, qui sont en nombre doublement infini, auront nécessairement une équation de la forme

$$(3) \qquad \lambda(bc\alpha + ap) + \mu(ac\beta + bq) + ab\gamma - cr = 0,$$

λ et μ désignant deux paramètres arbitraires.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ les coordonnées de l'axe central [1]

---

[1] Les coordonnées de l'axe central d'un complexe linéaire quelconque

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + Pp + Qq + Rr = 0$$

sont données par les formules

$$\alpha = P, \qquad \beta = Q, \qquad \gamma = R,$$
$$p = A - kP, \qquad q = B - kQ, \qquad r = C - kR,$$
$$k = \frac{AP + BQ + CR}{P^2 + Q^2 + R^2}.$$

d'un complexe L, on a

$$
(4) \qquad \begin{cases} \alpha = \lambda a, & \beta = \mu b, & \gamma = -c, \\ p = \lambda(bc - ka), & q = \mu(ac - kb), & r = ab + kc, \end{cases}
$$

$$
k = \frac{abc(\lambda^2 + \mu^2 - 1)}{\lambda^2 a^2 + \mu^2 b^2 + c^2}.
$$

Ainsi se trouvent exprimées en fonction des deux paramètres λ et μ les coordonnées d'une droite quelconque de la congruence qui nous occupe.

Des formules (4) on déduit

$$
(5) \qquad q\gamma - r\beta = \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b}\right)\beta\gamma = \mathrm{M}\beta\gamma,
$$

$$
(6) \qquad p\beta - q\alpha = \left(\frac{bc}{a} - \frac{ac}{b}\right)\alpha\beta = \mathrm{N}\alpha\beta.
$$

Dans notre Note citée plus haut, nous avons fait voir que si

$$
\begin{gathered}
au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu \\
+ 2b''uv + 2cu + 2c'v + 2c''w + d = 0
\end{gathered}
$$

est l'équation d'une quadrique quelconque, en coordonnées tangentielles, l'équation du complexe de Painvin de cette quadrique sera

$$
\begin{gathered}
\alpha^2(a' + a'') + \beta^2(a'' + a) + \gamma^2(a + a') - 2\alpha\beta b'' - 2\beta\gamma b - 2\gamma\alpha b' \\
+ 2(q\gamma - r\beta)c + 2(r\alpha - p\gamma)c' + 2(p\beta - q\alpha)c'' + (p^2 + q^2 + r^2)d = 0.
\end{gathered}
$$

De la forme de cette équation résulte une conséquence immédiate : Si une congruence appartient aux complexes de Painvin de deux quadriques

$$
\mathrm{Q}(u, v, w) = 0, \qquad \mathrm{Q}'(u, v, w) = 0,
$$

elle appartiendra également aux complexes de Painvin de toutes les quadriques représentées par l'équation

$$
\mathrm{Q}(u, v, w) + \rho\mathrm{Q}'(u, v, w) = 0,
$$

ρ désignant un paramètre variable.

Cela posé, observons que les équations (5) et (6) sont celles des complexes de Painvin des quadriques

$$M v w + u = 0,$$
$$N u v + w = 0.$$

Il suit de la remarque qui vient d'être faite que la congruence actuelle appartient au complexe de Painvin de la quadrique

$$M v w + u + \rho(N u v + w) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$u(1 + N\rho v) + w\rho\left(1 + \frac{Mv}{\rho}\right) = 0. \tag{7}$$

Profitons de l'indétermination de ρ pour égaler les deux quantités entre parenthèses; nous aurons

$$N\rho = \frac{M}{\rho},$$

d'où

$$\rho = \varepsilon\sqrt{\frac{M}{N}},$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1. Si l'on suppose que b est le plus grand des axes réels de l'hyperboloïde H, N sera positif et la valeur de ρ sera réelle. En tenant compte de cette valeur, l'équation (7) devient

$$(1 + \varepsilon v\sqrt{MN})\left(u + \varepsilon w\sqrt{\frac{M}{N}}\right) = 0.$$

La congruence actuelle appartient donc aux complexes de Painvin des quadriques

$$(1 + v\sqrt{MN})\left(u + w\sqrt{\frac{M}{N}}\right) = 0, \tag{8}$$

$$(1 - v\sqrt{MN})\left(u - w\sqrt{\frac{M}{N}}\right) = 0. \tag{9}$$

L'équation (8) représente un système de deux points : l'un F_1

$$1 + v\sqrt{MN} = 0$$

est situé sur l'axe des y à une distance $-\sqrt{\mathrm{MN}}$ de l'origine; l'autre F_2

$$u+w\sqrt{\frac{M}{N}}=0$$

est à l'infini dans la direction d'une droite parallèle au plan des xz et faisant avec l'axe des x un angle ω donné par la formule

$$\tan\omega=\sqrt{\frac{M}{N}}.$$

Quant à l'équation (9), elle représente le système de deux points F'_1 et F'_2 définis comme il suit : F'_1 est le symétrique de F_1 par rapport à l'origine; F'_2 est symétrique de F_2 par rapport à l'axe des z.

Appelons *angle sous lequel on voit d'une droite donnée un segment donné* l'angle des plans passant par la droite et par les extrémités du segment. Nous pourrons alors énoncer la propriété suivante :

De toute droite de la congruence qui nous occupe on voit sous des angles droits les segments F_1F_2 *et* $F'_1F'_2$.

3. Il ne nous reste plus maintenant qu'un mot à ajouter pour démontrer le théorème énoncé au n° **1**. Les complexes de Painvin (5) et (6) ont en commun, outre la congruence actuelle, une congruence du premier ordre et de la première classe : celle des droites qui coupent l'axe des y à angle droit. Mais, comme on sait, la congruence actuelle est du troisième ordre et de la deuxième classe; l'ensemble de ces deux congruences constitue donc bien l'intersection complète des complexes de Painvin (5) et (6).