

# BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GENTY

## **Sur les surfaces à courbure totale constante**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 22 (1894), p. 106-109

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1894\\_\\_22\\_\\_106\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__106_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE;**

Par M. E. GENTY.

Dans son remarquable Mémoire *Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces*, M. Cosserat donne un certain nombre de formules, qui établissent une liaison étroite entre la théorie des surfaces et celle des congruences des droites.

Nous allons montrer, dans cette Note, comment la théorie des congruences conduit simplement, pour les surfaces à courbure totale constante, aux transformations de MM. Bianchi et Bäcklund (DARBOUX, *Leçons*, t. III, p. 420 à 438).

En conservant toutes les notations de M. Cosserat, on sait que la demi-distance focale  $\rho$  d'une congruence rectiligne donnée par la représentation sphérique de ses développables satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \beta \frac{\partial \rho}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left( \frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + f \right) \rho = 0.$$

Si l'on a

$$(2) \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + f = 0,$$

l'équation (1) sera vérifiée par  $\rho = \text{const.}$ , et, dans ce cas, les équations qui expriment que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la surface focale prennent la forme

$$\frac{\rho}{\alpha_1} = \frac{\gamma}{\beta_1} = \frac{\beta_1 \gamma - \beta^2 - \varepsilon}{\beta_1^2 - \alpha_1 \rho^2 + c} = -\frac{\varepsilon}{c}.$$

ou

$$(3) \quad \begin{cases} e\beta + g\alpha_1 = 0, \\ e\gamma + g\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Or on a

$$h^2\alpha_1 = e\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}\right) - \frac{f}{2}\frac{\partial e}{\partial u},$$

$$h^2\beta = \frac{g}{2}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{f}{2}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$h^2\beta_1 = \frac{e}{2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{f}{2}\frac{\partial e}{\partial v},$$

$$h^2\gamma = g\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}\right) - \frac{f}{2}\frac{\partial g}{\partial v},$$

où l'on a posé

$$h^2 = ef - g^2.$$

En tenant compte de ces relations, on met les équations (3) sous la forme

$$\frac{\partial \log f^2}{\partial u} = \frac{\partial \log(e\beta)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log f^2}{\partial v} = \frac{\partial \log(e\gamma)}{\partial v},$$

d'où

$$\frac{f^2}{e\beta} = \cos^2\theta = \text{const.},$$

ce qui montre que les plans tangents aux points  $F_1$  et  $F_2$  des deux nappes de la surface focale se coupent sous un angle constant  $\theta$ .

La réciproque est évidente et, si  $\rho$  et  $\theta$  sont des constantes, les lignes de courbure et, par suite aussi, les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

La courbure totale au point  $F_1$  de la première nappe a alors pour expression, en supposant  $2\rho = 1$ ,

$$\frac{1}{R_1 R'_1} = \frac{h^2\gamma}{g^2\beta_1} = -\frac{h^2}{e\beta} = -\sin^2\theta;$$

on trouve de même, pour la courbure totale au point  $F_2$  de la seconde nappe,

$$\frac{1}{R_2 R'_2} = \frac{h^2\alpha_1}{e^2\beta} = -\sin^2\theta;$$

donc les deux nappes de la surface focale ont leur courbure totale constante et égale à  $-\sin^2\theta$ .

Les lignes de courbure des deux nappes ont pour équation

$$(4) \quad \beta\beta_1 du^2 + (\beta_1\gamma - \beta^2 - g) du dv - \beta\gamma dv^2 = 0,$$

et l'équation définissant les rayons de courbure principaux de la seconde nappe prend la forme

$$(5) \quad \alpha_1 h^2 R^2 - h\sqrt{e}(\alpha_1\beta + \beta_1^2 + e)R + e^2\beta = 0.$$

Soit  $(du, dv)$  l'une des solutions de l'équation (4); le plan normal à cette direction mené par le point  $F_1$ , lequel est un plan principal de la nappe  $(F_1)$ , rencontre la normale de la seconde nappe en un point  $A$ , et, si l'on désigne par  $R$  la distance  $F_2A$ , on reconnaît très simplement que cette distance est définie par l'équation

$$\beta_1 du - \beta dv + \frac{hR dv}{\sqrt{e}} = 0.$$

Si l'on élimine  $du$  et  $dv$  entre cette équation et l'équation (4), il vient

$$\beta(\beta\sqrt{e} - hR)^2 + \sqrt{e}(\beta_1\gamma - \beta^2 - g)(\beta\sqrt{e} - hR) - \beta\beta_1\gamma e = 0.$$

En développant cette équation et tenant compte des relations (3), on retrouve l'équation (5). Donc :

*Si deux surfaces se correspondent point par point de telle manière que la distance entre ces deux points soit constante, et que les deux plans tangents en ces deux points contiennent la droite qui les joint et forment entre eux un angle constant  $\theta$ , les lignes de courbure et les lignes asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces, pour lesquelles les courbures totales sont constantes et égales à  $-\frac{\sin^2\theta}{p^2}$ ,  $p$  étant la distance constante des deux points correspondants.*

Pour  $\theta = 90^\circ$ , on a la transformation de M. Bianchi; si  $\theta$  est un angle quelconque, on a la transformation de M. Bäcklund.

Dans le premier cas, la congruence est une congruence de normales et l'équation (1) devient

$$(6) \quad \frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial\beta_1}{\partial v} = 0.$$

On en déduit immédiatement

$$eg = \varphi(u)\psi(v),$$

ou, en particulierisant convenablement les paramètres,

$$(7) \quad eg = 1.$$

La relation qui précède, jointe à  $f = 0$ , caractérise la représentation sphérique des surfaces pour lesquelles la différence des rayons de courbure est constante.

Remarquons enfin que, dans ce cas, l'élément linéaire de la surface  $(F_1)$  a pour expression

$$ds^2 = (\beta_1 du - \beta dv)^2 + e dv^2;$$

or la relation (6) montre qu'on peut poser

$$\beta_1 du - \beta dv = du_1.$$

On a donc

$$ds^2 = du_1^2 + e dv^2,$$

ce qui montre que  $v$  est le paramètre d'un système de lignes géodésiques sur  $(F_1)$ . On verrait de même que  $u$  est le paramètre d'un système de lignes géodésiques sur  $(F_2)$ .

Les trajectoires orthogonales de ces géodésiques se correspondent sur les deux nappes et elles ont pour équation différentielle

$$\beta_1 du - \beta dv = 0,$$

ou

$$e \frac{\partial g}{\partial u} du - g \frac{\partial e}{\partial v} dv = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial \log e}{\partial v} dv - \frac{\partial \log g}{\partial u} du = 0,$$

ou enfin, en tenant compte de la relation (7),

$$\frac{\partial \log e}{\partial u} du + \frac{\partial \log e}{\partial v} dv = 0.$$

Donc leur équation finie est  $e = \text{const.}$

---